

Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Dichte f ist gegeben durch

$$f(x) = c(1 - x^2)[|x| \leq 1].$$

- (a) Bestimmen Sie c .
(b) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Dichte f . Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{500} X_i \leq 18\right).$$

2. X und Y seien unabhängig gammaverteilt mit Dichte $f_X(x) = \Gamma(\alpha)^{-1}x^{\alpha-1}e^{-x}[x > 0]$ und $f_Y(y) = \Gamma(\beta)^{-1}y^{\beta-1}e^{-y}[y > 0]$.

Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $S = X + Y$ und $Q = X/Y$. Sind S und Q unabhängig?

3. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $P(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.

4. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittleren Absorptionszeiten für die einzelnen Zustände.

5. (X_1, \dots, X_n) sei eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}[x > 0].$$

- (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für θ und zeigen Sie, dass er effizient ist.
(b) Bestimmen Sie ein approximatives Konfidenzintervall für θ .

6. Gegeben Sei die Stichprobe

-0.85 -1.17 -1.36 -0.44 0.21 -1.32 -0.17 -0.63 -0.83 1.76 0.19 -0.58
-1.45 -1.39 -0.74 0.47 -0.26 -0.62 -0.49 -0.33 1.86 -0.41 -2.28 -1.49
1.95

- (a) Testen Sie, ob eine Normalverteilung vorliegt.
- (b) Nehmen Sie an, dass eine Normalverteilung vorliegt, und testen Sie $H_0 : \mu = 0$ gegen die zweiseitige Alternative.

7. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	1/8	1/8
2	0	1/8	1/8	0
3	0	1/16	0	1/16
4	0	1/16	0	1/16

Bestimmen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X, Y)$.

8. Gegeben sei die Verteilung

$$P = (0.15, 0, 2, 0.1, 0.05, 0, 5).$$

Bestimmen Sie für diese Verteilung die Entropie, den Huffman- und den Shannon-Code und ihre mittlere Codewortlänge.