Matrikelnummer: 1029050

Studienkennzahl: 033 286

Aufgabe 1 (25 %):

etrachten Sie ein einfaches lineares Maximierungsproblem mit den Nebenbedin-
ungen

$$\begin{array}{lrcrcl} g^1: & x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\ g^2: & 2x_1 & + & x_2 & \le & 8 \\ g^3: & & & x_2 & \le & 4 \end{array}$$

Lösungspunkt lauten die dualen Variablen der Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 1 \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Der maximale Zielfunktionswert ist 16.

) Die optimale Lösung lautet $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

) Sei $h(x_1)$ die Isoquante der Zielfunktion, welche durch die Lösung des
lems verläuft. Dann liegt die Steigung dh/dx_1 dieser Isoquante im In
$[-1, 0]$.

Sind bei diesem Problem im Optimum die Schattenpreise aller drei N
dingungen positiv (bei beliebiger linearer Zielfunktion), dann ist d
male Lösung gleich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Würde man die Nebenbedingung g^2 geringfügig (marginal) ändern

$$2x_1 + x_2 \le (8 + dp),$$

so hätte das keine Auswirkung auf den Zielfunktionswert. f

f) Nehmen Sie nun an, im Optimum wäre der relative Deckungsbeitrag von x_1 (= duale Variable der Variable x_1) negativ. (Die Schattenpreise der Nebenbedingungen würden dann natürlich nicht die oben gegebenen Werte annehmen.) Die optimale Lösung wäre in diesem Fall entweder $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Aufgabe 2 (25 %):

Binomialmodell zur Optionsbewertung: Betrachten Sie eine Aktie, die heute ($t = 0$) den Wert von $S_0 = 250$ EUR pro Stück hat und in $t = 1$ entweder auf den Wert von $S_{1u} = 300$ EUR pro Stück steigt (Zustand u) oder auf den Wert von $S_{1d} = 200$ EUR pro Stück sinkt (Zustand d). Die Aktie bezahlt im betrachteten Zeitraum keine Dividende. Eine risikolose Alternativveranlagung (Sparbuch) bietet über den betrachteten Zeitraum eine Rendite von 5%. 1,05

Mit $C_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer Amerikanischen Call Option mit Laufzeit bis $t = 1$ und einem Ausübungspreis von K. Mit $P_0(K)$ bezeichnen wir den $t = 0$ Wert einer Amerikanischen Put Option mit Laufzeit bis $t = 1$ und einem Ausübungspreis von K. Der Wert der Put-Option bei Ausübung ist gleich $\max(K - S, 0)$. Beispiel: Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ sind die Werte $P_{1u} = 0$ EUR pro Kontrakt und $P_{1d} = 20$ EUR pro Kontrakt.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 30.00 (auf Cent gerundet). (250 - 220)

b) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 0.00 (auf Cent gerundet).

c) Bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ ist es optimal, die Put Option nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ auszuüben.

d) Die Pseudo-Wahrscheinlichkeit $\bar{\pi}$ für einen Übergang in den Zustand u in dem angegebenen Binomialbaum ist gleich 5/8 = 62.5%.

e) Sinkt bei einem Ausübungspreis von $K = 220$ der Zinssatz auf $r = 0\%$, dann sinkt der Marktwert der Call Option zum Zeitpunkt $t = 0$ auf EUR 40.00 (auf Cent gerundet).

f) Bei einem Ausübungspreis von $K = 270$ ist der Marktwert der Put Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich EUR 20.00 (auf Cent gerundet).

Aufgabe 3 (25 %):

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

Der Diskontsatz ist 10%.

Firma F will so investieren, dass sie den netto Barwert der Einsparungen (Barwert der gesparten Energiekosten minus Barwert der Investitionskosten) maximiert.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Wenn die Firma bis zu $t = 2$ mit der Investition wartet, dann ist es optimal, im Zustand u in ein Aggregat vom Typ 2 zu investieren und im Zustand d in ein Aggregat vom Typ 1.

b) Würde die Firma zu $t = 1$ in ein Aggregat vom Typ 1 investieren, so hätte diese Strategie einen Wert von EUR 130 000,–.

c) Der Wert der optimalen Investitionsstrategie ist V_1 = EUR 200 000,–

d) Es ist optimal, zu $t = 1$ in ein Aggregat vom Typ 2 zu investieren.

e) Würde ein Aggregat vom Typ 2 nur EUR 556 000,– kosten, dann wär[e es] weiterhin optimal, die Investition bis $t = 2$ aufzuschieben.

f) Würde die Firma zu $t = 1$ in ein Aggregat vom Typ 2 investieren, s[o hätte] diese Strategie einen Wert von EUR 260 000,–.

70 000 · 0,60

90000 · 0,40

V_{2u} = 55000

a) Grenzkosten sind definiert als die erste Ableitung der Kostenfunktion K nach der Faktoreinsatzmenge r.

b) Betrachte eine reellwertige Funktion f. Entlang einer Isoquante bleibt der Funktionswert konstant.

c) Konvexe Mengen: Eine Teilmenge des $D \in \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in D$ gilt:

$$[tx + (1-t)y] \in D, \forall t \in [0, 1].$$

d) Dynamische Optimierung: Bei Markov-Problemen hängt die optimale Aktion a_t zum Zeitpunkt t nur durch t und den aktuellen Zustand s_t von der Historie ab.

e) Gemischt-ganzzahliges lineares Maximierungsproblem: Der optimale Zielfunktionswert des Problems P0 im Branch-and-Bound Algorithmus stellt eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert der Lösung de[s] Problems dar.

f) Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen: Die Lagrange-Multiplikat[oren] heißen auch duale Variablen der Variablen.

Aufgabe 4 (25 %):

Firma F überlegt, ein Aggregat für die Erzeugung von elektrischer Ener[gie zu] kaufen. Die Investition kann entweder zum Zeitpunkt $t = 1$ oder zum Ze[itpunkt] $t = 2$ getätigt werden. Zur Auswahl stehen zwei Typen, es kann maxi[mal ein] Aggregat errichtet werden, die Lebensdauer ist unbeschränkt:

- Typ 1: Investitionskosten: EUR 400 000, –
- Typ 2: Investitionskosten: EUR 600 000, –

[B]ei sofortiger Investition in $t = 1$ wäre die Einsparung an Energiek[osten] [(ohne B]erücksichtigung der Investitionskosten) in der aktuellen Periode gle[ich]

$$c_1 = \begin{cases} \text{EUR } 70\,000,- & \text{Typ 1} \\ \text{EUR } 90\,000,- & \text{Typ 2} \end{cases}$$

[Zu]m Zeitpunkt $t = 2$ kann der Energieverbrauch entweder steig[en (Zustand u, W]ahrscheinlichkeit $\pi = 60\%$) oder fallen (Zustand d, Wahrschein[lichkeit] [40] %).

Der Wert eines Aggregats in $t = 2$ (das ist der Wert der zu[künftigen] [En]ergiekosten, Investitionskosten nicht enthalten) ist gleich

$$V_{2,u} = \begin{cases} \text{EUR } 550\,000,- & \text{Typ 1} \\ \text{EUR } 940\,000,- & \text{Typ 2} \end{cases}, \quad V_{2,d} = \begin{cases} \text{EUR } 44[\ldots] \\ \text{EUR } 51[\ldots] \end{cases}$$

Betrachte folgendes Maximierungsproblem:

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 9x_2 \rightarrow_{x_1,x_2} \max$$

$\Delta f - f'$

unter den Nebenbedingungen

$$g1: \quad 4(x_1 - 8)^2 + 9(x_2 - 9)^2 \leq 25,$$
$$g2: \quad x_1 \geq 6.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Die Lösung des Problems ist $x_1 = 10, x_2 = 10$.

b) Die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des unbeschränkten Problems lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 9 = 0.$$

Das unbeschränkte Problem hat daher keine Lösung.

c) Unter der Annahme, dass nur $g2$ bindend ist, hat das Problem zwei lokale Maxima: $x_1 = 6, x_2 = 8$ sowie $x_1 = 10, x_2 = 10$.

d) Unter der Annahme, dass nur $g1$ bindend ist (und $g2$ folglich nicht), lautet die erste Ableitung der Lagrange-Funktion nach x_1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 25 - 4(x_1 - 8)^2 - 9(x_2 - 9)^2$$

?

e) Ändert man die Nebenbedingung $g1$ marginal in

$$g1: \quad 4(x_1 - 8)^2 + 9(x_2 - 9)^2 \leq 25 + dp,$$

?

so ändert sich der optimale Zielfunktionswert in $170 + \frac{1}{2}dp$.

f) Ändert man die Nebenbedingung $g2$ marginal in

$$g2: \quad x_1 \geq 6 + dp.$$

so ändert sich der optimale Zielfunktionswert in $138 + 16\,dp$.

Aufgabe 4 (25 %): b,c,e

Eine Firma erzeugt Gut A und beherrscht den Markt als Monopolist. Die Abhängigkeit der Produktionsmenge x_A von den Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 der Rohstoffe 1 und 2 ist durch folgende Cobb-Douglas Produktionsfunktion charakterisiert:

$$x_A = f(r_1, r_2) = 2^{(11/5)} r_1^{(2/5)} r_2^{(3/5)}.$$

Rohstoff 1 kostet EUR 4 pro Einheit, Rohstoff 2 kostet EUR 24 pro Einheit. Eine Marktstudie hat ergeben, dass bei einem Preis von EUR 180 pro Einheit des Gutes A ein Absatz von 5 Einheiten erzielt werden kann. Bei einem Preis von EUR 80 pro Einheit lassen sich hingegen 25 Einheiten verkaufen. Die Preis-Absatz-Relation ist linear.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Die linearisierte Preis-Absatz-Funktion für das Gut A lautet $p = 100 - 20x_A$.

b) Der Expansionspfad der optimalen Produktion ist $4r_2 = r_1$.

c) Die Kostenfunktion der Produktion lautet $K(x) = 5x_A$. $K = 4x_1 + 24x_2$

d) Die gewinnoptimale Ausbringung ist $x = 10$ Einheiten.

e) Die gewinnoptimale Preis ist EUR 105 pro Einheit.

f) Der Rohstoffbedarf im Gewinnoptimum beträgt $r_1 = 5, r_2 = 20$.

11/5 2/5 3/5

kabelplus Ihr Multimedia / Portal für Eidler Maxin TISS

BwOpt_Test_WS14.pdf - Reader

Aufgabe 2 (25 %): d,e,f

Wie in der Vorlesung nehmen wir an, dass Zielfunktionen zwei Mal stetig differenzierbar sind und auf offenen und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Optimierung ohne Nebenbedingungen, hinreichende Optimalitätsbedingung: Wenn gilt $f_x(x^*) = 0$, dann nimmt f in x^* ein lokales Maximum an, wenn die zweite partielle Ableitung von f bezüglich jeder Variable negativ ist, d.h. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

b) Die partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach der Ausbringungsmenge $\frac{\partial f}{\partial x}$ nennt man Grenzproduktivität, auch MP (für *marginal productivity*) genannt.

c) Optimierung unter Gleichheitsbedingungen: Der Gradient der Zielfunktion f_x kann im Optimum als Linearkombination der Isoquanten der Nebenbedingungen geschrieben werden und muss immer gleich null sein.

d) Eine symmetrische Matrix A ist negativ-definit, wenn ihre Minoren im Vorzeichen alternieren, beginnend mit einem negativen Vorzeichen.

e) Optimierung unter Gleichheitsnebenbedingungen: Die Schattenpreise der Nebenbedingungen können im Optimum beliebiges Vorzeichen annehmen.

f) Betrachte eine reellwertige Funktion f. Entlang einer Isoquante bleibt der Funktionswert konstant.

Aufgabe 4 (25 %):

Dynamische Programmierung: Ein Unternehmen kann zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ produzieren und die erzeugten Einheiten zu $t = 3$ um einen Preis von EUR 24.2/Stück absetzen. Zu $t = 1$ und $t = 2$ muss jeweils entschieden werden, entweder 0, 100, 1000 oder 2000 Stück zu produzieren, die Kosten dafür betragen 0, 5000, 30000 bzw. 42000 EUR.

Die Diskontrate ist 10%, es fallen keine Lagerkosten an, zu Beginn ist das Lager leer.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die Wertefunktion zu $t = 3$ in Abhängigkeit von der Gesamtproduktionsmenge s ist $V_3(s_3) = 24.2s_3$.

b) Wenn zu $t = 2$ der Lagerstand s_2 gleich 100 ist, dann ist es optimal, 2000 Stück zu produzieren und $V_2(100) = 4200$.

c) Es ist nicht optimal, zu $t = 1$ zu produzieren. D.h., in der ersten Periode ist die optimale Produktionsentscheidung $a_1 = 0$.

d) Die Wertefunktion zu $t = 1$ ist $V_1(0) = 1818.18$ EUR.

e) Zu $t = 2$ ist es immer optimal die Maximalmenge von 2000 Stück zu produzieren.

f) Würde man die Produktionskapazität mit 1000 Stück pro Zeiteinheit beschränken, dann würde die Firma überhaupt nicht produzieren.

Aufgabe 1 (25 %):

Firma A produziert 5 Stück eines Produkts pro Zeiteinheit in einem unsicheren Marktumfeld. Die Stückkosten k sind konstant bei EUR 178/Stück. Wir betrachten drei Zeitpunkte $t = 0$, $t = 1$, $t = 2 = T$. Zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ kann produziert werden und zum Marktpreis verkauft werden. Zum Endzeitpunkt T muss die Produktion stillgelegt werden, was Kosten von EUR 121 verursacht. Die Preisentwicklung sieht folgendermaßen aus:

$$p_0 = 200\,/\text{Stück}, \qquad p_1 = \begin{cases} p_{1,u} = 220\,/\text{Stück} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 2/3 \\ p_{1,d} = 160\,/\text{Stück} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \end{cases}$$

Die Diskontrate ist 10% pro Zeiteinheit. Die Produktion kann jederzeit stillgelegt werden, was die Kosten von EUR 121 entsprechend früher anfallen lässt.

Es ist das Ziel der Firma, den diskontierten Gesamt-Cashflow zu maximieren. Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Wenn die Firma zum Zeitpunkt $t = 0$ produziert, erwirtschaftet sie einen Cashflow von EUR 110.

b) Wenn die Firma zum Zeitpunkt $t = 1$ bei einem Preis von 160 produziert und verkauft, dann erzielt sie einen Cashflow von EUR -90.

c) Wenn das Unternehmen entscheidet in $t = 0$ und $t = 1$ zu produzieren, beträgt der Wert V_0 EUR 110.

d) Die optimale Strategie ist es, im Zeitpunkt $t = 0$ zu produzieren und im Zeitpunkt $t = 1$ stillzulegen, wenn der Preis auf EUR 160 / Stück sinkt, aber weiter zu produzieren, wenn der Preis auf EUR 220 / Stück steigt. Der maximale Wert ist V_0 = EUR 133.939.

Aufgabe 4: Dynamische Programmierung

$p = 24{,}2$ EUR/Stk. in t_3

Produktion in t_1 und t_2 zu

Stück	Kosten	Stückkosten
0	0	0
100	5000	50
1000	30000	30
2000	42000	21

Diskontrate 10%

a) $V_3(s_3) = 24{,}2 \cdot s_3$

b)

t_2: s_2 \ a_2	0	100	1000	2000	$V_2(s_2)$	$g_2(s_2)$
0	0	$\frac{100 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 5000 = -2800$	$\frac{1000 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 30000 = -8000$	2000	2000	2000
100	$\frac{100 \cdot 24{,}2}{1{,}1} = 2200$	$\frac{200 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 5000 = -600$	-5800	4200	4200	2000
1000	$\frac{1000 \cdot 24{,}2}{1{,}1} = 22000$	$\frac{1100 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 5000 = 19200$	14000	24000	24000	2000
f) 2000	$\frac{2000 \cdot 24{,}2}{1{,}1} = 44000$	$\frac{2100 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 5000 = 41200$	24000	46000	46000	2000

t_1: s_1 \ a_1	0	100	1000	2000	$V_1(s_1)$
0	$K(0) + V_2(0) = 0 + \frac{2000}{1{,}1} = 1818{,}18$	$K(100) + V_2(100) = -5000 + \frac{4200}{1{,}1} = -1181{,}82$	$K(1000) + V_2(1000) = -30000 + \frac{24000}{1{,}1} = -8181{,}82$	$K(2000) + V_2(2000) = -42000 + \frac{46000}{1{,}1} = -181{,}82$	1818,18

$$V_2(100) = \frac{2100 \cdot 24{,}2}{1{,}1} - 42000 = 4200$$

c) $V_1(0) = K(0) + V_2(0) = 0 + \frac{2000}{1{,}1} = 1818{,}18 \Rightarrow a_1 = 0$

d) siehe c)

e) $g_2(s_2) = 2000$ für $s_2 = 0; 100; 1000; 2000$

f) $V_1'(0) = K(0) + V_2'(0) = 0 + \left(-\frac{8000}{1{,}1}\right) = -7272{,}73 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 0$