5. UE Analysis f. INF und WINF

125 $y = f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 4x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

$f(0) = 2 > 0, \quad f(1) = \sqrt{e} - 3 < 0,$

$f(6) = e^{3} - 23 < 0, \quad f(7) = e^{\frac{7}{2}} - 27 > 0 \implies$

Nach dem Nullstellensatz (Buch, 4.88) gibt es $c \in [0,1]$, $d \in [6,7]$, so dass $f(c) = f(d) = 0$.

Eine näherungsweise Berechnung von c, d ist durch Halbierung der Intervalle $[0,1]$ und $[6,7]$, Betrachtung der Teilintervalle und anschließende Fortsetzung des Verfahrens möglich. Weitere Möglichkeiten (z.B. die „regula falsi") findet man im Buch, Abschnitt 8.2.

128 Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in [a,b].$$

Wegen $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$ (f bildet ja $[a,b] \to [a,b]$ ab) gilt

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \quad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Nach dem Nullstellensatz (Buch, 4.88) gibt es also ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) - x_0 = g(x_0) = 0, \quad \text{also}$$

$$f(x_0) = x_0$$

Anmerkung: Nach dem Nullstellensatz müssten wir zwar $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$ voraussetzen, aber die Fälle $g(a) = 0$ bzw. $g(b) = 0$ sind trivial.

$\boxed{133}$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}}$ definiert und differenzierbar

$\iff x^2-4x+3\neq 0$ und $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}>0$.

Dazu betrachten wir die im Zähler und Nenner stehenden quadratischen Funktionen (Parabeln).

Es ist $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$ und $x^2+2x+1=0 \iff x=-1$.

Weiters gilt: $x^2-4x+3=0 \iff x=2\pm\sqrt{4-3}=\begin{cases}3,\\ 1.\end{cases}$

Also ist $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

Daraus folgt: $x^2-4x+3>0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$.

Insgesamt erhalten wir:

f(x) ist definiert und differenzierbar auf der Menge $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(3,\infty)$.

Berechnung der Ableitung:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(2x+2)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2+2x+1)}{(x^2-4x+3)^2}$$

Nebenrechnung: $2\cdot[(x+1)(x^2-4x+3)-(x-2)(x^2+2x+1)]=$

$$=2\cdot\big(x^3-4x^2+3x+x^2-4x+3-\underbrace{(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)}_{=x^3-3x-2}\big)=$$

$$=2\cdot(-3x^2+2x+5).$$

Daraus folgt:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x+1}}\cdot\frac{2\cdot(-3x^2+2x+5)}{(x^2-4x+3)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2+2x+5}{(x^2-4x+3)\cdot\sqrt{(x^2-4x+3)\cdot(x^2+2x+1)}}=$$

$$=\frac{-3x^2+2x+5}{(x^2-4x+3)^{\frac{3}{2}}\cdot(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$\boxed{136}$ Für $x\in(-1,1)$ ist $\sin(\arcsin x)=x$, also
$\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)'=1$. Es gilt $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$,
und für $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$: $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$, also
$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}$.

$$\Longrightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

Analog zeigt man: $(\arctan y)'=\dfrac{1}{1+y^2}$, $y\in\mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x^2+x^2}\cdot\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{(1-x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1).$$

$\Longrightarrow \arcsin x=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$. Für $x=0$ gilt:
$\arcsin 0=\arctan 0=0\Longrightarrow$ $\arcsin x=\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

$\boxed{138}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^n}$, $x>0$. Für $x_0\neq 0$ gilt:

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x_0{}^n}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0{}^n-x^n}{x^n x_0{}^n(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x_0-x)\cdot(x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x+\dots+x^{n-1})}{x^n x_0{}^n(x-x_0)}=$$

$$=\frac{-n\,x_0{}^{n-1}}{x_0{}^{2n}}=-n\,x_0^{-n-1}=\frac{-n}{x_0^{n+1}},\ \text{also}$$

$$(x^{-n})'=(-n)x^{-n-1}\ \text{oder}\ \left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Die Formel gilt für $x\neq 0$ und sieht für $k=-n<0$ ähnlich aus wie für $n>0$:

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\quad (x^k)'=k\cdot x^{k-1}.$$

$\boxed{139}$ Vorbemerkung: Wegen $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ ist
$-x^2 \le x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \le x^2$, also $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Somit ist $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ überall stetig.

Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$
$= 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, also f stetig differenzierbar.

Für $x = 0$ ist $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ (wie zuvor).

Somit ist f auch im Punkt $x = 0$ differenzierbar.

Insgesamt gilt: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$

und $f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Würde $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existieren, dann würde wegen
$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ auch $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ existieren. Dies
gilt jedoch nicht, wie die beiden Nullfolgen

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(2n+1)}$$ zeigen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1$, aber

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 0$.

Also ist f nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar.