Beispiel 139 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 11, 29.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y'' - y = 4e^x$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Siehe Hauptartikel Beispiel 141!

3 Lösung des Beispiels

Die allgemeine Lösung der : inhomogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' - y = 4e^x$$

wird in drei Schritten bestimmt:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$
2. Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)
3. Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$); ggf. Lösung der Anfangswertaufgabe

3.1 Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$

Lösung von $y'' - y = 0$ durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ (Parameter λ). Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Einsetzen des Ansatzes ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} &= 0 \qquad \text{charakteristisches Polynom} \\ (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) &= 0 \qquad \text{Zerlegung in Linearfaktoren} \\ \text{Erhalte Lösungen mit Fall} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 &= -1 \qquad \text{verschiedenwertige Lösungen}, \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Basisfunktionen sind somit: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Die **allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung** lautet somit:

$$\mathbf{y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}}$$

3.2 Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)

Betrachte **Störfunktion** - Typus $s(x) = e^{cx}$. Unsere Störfunktion lautet $s(x) = e^x$ - mit $c = 1$.
Vergleiche c mit λ_1 und λ_2 - $c = \lambda_1$, $c \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ **einfacher Resonanzfall**, **Verwendung der Versuchslösung** $\mathbf{y_p^{(x)} = xAe^{-2x}}$. Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y_p' = Ae^x + xAe^x$$
$$y_p'' = 2Ae^x + xAe^x 4x^2 Ae^{-2x} - 8xAe^{-2x} + 2Ae^{-2x}$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$xAe^x + 2Ae^x - xAe^x = 4e^x \qquad \Rightarrow \qquad A = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y_p^{(x)} = 2xe^x}$$

3.3 Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$)

$$\mathbf{y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + 2xe^x}$$