Übungsblatt 1 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

1.) Man betrachte die Kurvenschar $y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme durch Differenzieren und anschließende Elimination von C eine implizite Dgl. 1. Ordnung, die diese Kurvenschar als allgemeine Lösung besitzt.

(b) Man weise nach, daß hier die Einhüllende dieser Kurvenschar ebenfalls Lösung der erhaltenen Dgl. ist, aber nicht der Kurvenschar angehört, also eine sogenannte singuläre Lösung darstellt. Die Einhüllende erhält man durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$y - (Cx + C^2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial C}\Big[y - (Cx + C^2)\Big] = 0.$$

2.) Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann genügt f in jedem Rechteck $R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$, das ganz in G liegt, einer L-Bedingung (bezüglich y) mit L-Konstanten $L = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$.

Mittelwertsatz: Ist f auf $[a, b]$ differenzierbar, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.) Man zeige, daß die Funktion $f(x, y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer L-Bedingung (bezüglich y) genügt, und gebe eine L-Konstante an.

4.) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1$.
Man führe 3 Iterationsschritte der Picard-Iteration durch und vergleiche die erhaltenen Approximationen mit der exakten Lösung des AWP (Trennung der Variablen).

5.) Man löse das folgende AWP durch Trennung der Variablen: $1 + y^2 - xy' = 0, \quad y(1) = 1$.

6.) Zeige, daß $\cos x \cdot \cos y - (\sin x \cdot \sin y + y^2)\, y' = 0$ eine exakte Dgl. ist und löse das AWP $y(0) = 1$.

7.) Die Dgl.

$$y\,dx + x(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

ist nicht exakt, aber mittels integrierendem Faktor $M(x,y) = \frac{1}{(xy)^3}$ geht sie in eine exakte Dgl. über. Man verifiziere dies und gebe dann die allgemeine Lösung der Dgl. an.

8.) Man ermittle für die Dgl.

$$4 - 4x^2 - y^2 - 3xy\,y' = 0$$

einen nur von x abhängenden integrierenden Faktor $m(x)$, der diese Dgl. in eine exakte Dgl. überführt und gebe die allgemeine Lösung der Dgl. an.

Übungsblatt 2 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

9.) Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1+x^3)y' - x^2y = 0, \quad y(1) = 2.$$

10.) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(x^2-1)y' = y.$$

(a) Man bestimme die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Für welche Anfangswerte (x_0, y_0) ist das zugehörige Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar, welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatz sind dabei verletzt?

11.) Man ermittle für die Dgl.

$$4xy + 3y^4 + (2x^2 + 5xy^3)y' = 0$$

Konstante α und β, sodaß der integrierende Faktor $M(x,y) = x^\alpha y^\beta$ diese Differentialgleichung in eine exakte überführt und gebe sodann die allgemeine Lösung derselben an.

12.) Für welche Werte von y_0 ist das AWP $xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = y_0$ lösbar?
Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

13.) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli Dgl.:

$$y' + y = (\cos x - \sin x)y^2.$$

14.) Man löse das Anfangswertproblem $y(1) = 1$ für folgende Ähnlichkeitsdifferentialgleichung:

$$y' = \frac{y(y+x)}{x^2}.$$

15.) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y-6x}{2y-6x}\right), \quad y(1) = 2.$$

16.) Das logistische Gesetz für das Wachstum einer Population im beschränkten Lebensraum lautet

$$\dot{x} = (a - bx)\,x, \quad \text{für } a, b, > 0.$$

Man löse das AWP $x(t_0) = x_0$ und bestätige, daß $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}$ für $x_0 > 0$.

Übungsblatt 3 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

17.) Man löse das AWP
$$yy'' + y'^2 = 1, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1.$$

18.) Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand R mit 8 Ohm, der mit einer Induktion L von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn

(a) $E = E(t) = 64$,

(b) $E = E(t) = 32e^{-8t}$.

Hinweis: Es muß gelten, daß die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis = 0 ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist RI und bei der Induktion $L\frac{dI}{dt}$.

19.) Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

(a) Wieviel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?

(b) Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen:
Gegeben: AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.
Unterteilung der Strecke $[x_0, x]$ in n gleich große Teile.
Schrittweite $h := \frac{x - x_0}{n}$.
Stützstellen $x_k := x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
Einschrittverfahren: Iterationen $y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k, h)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Euler-Verfahren: $F(x_k, y_k, h) := f(x_k, y_k)$.

Verfahren von Heun: $F(x_k, y_k, h) := \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$, wobei $K_1 := f(x_k, y_k)$, $K_2 := f(x_k + h, y_k + hK_1)$.

Verfahren von Runge-Kutta: $F(x_k, y_k, h) := \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$, wobei $K_1 := f(x_k, y_k)$, $K_2 := f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_1)$, $K_3 := f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_2)$, $K_4 := f(x_k + h, y_k + hK_3)$.

20.) Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß n mindestens gewählt werden muß, damit beim Euler-Verfahren der relative Fehler für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

21.) Man vergleiche das Euler-Verfahren, das Verfahren von Heun und das Verfahren von Runge-Kutta für das AWP $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.6$, wobei $n = 3$ gewählt werden soll. Löse das AWP auch exakt und ermittle jeweils den relativen Fehler für die einzelnen Verfahren.
Anmerkung: Nach Möglichkeit programmiere man die einzelnen Verfahren. Wenn "mit der Hand" gerechnet werden muß, wähle $n = 1$.

22.) Man bestimme die Reihenentwicklungen von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ aus der Dgl.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

mittels Potenzreihenansatz $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
Hinweis: Lösen der gegebenen Dgl. führt zur allg. Lsg. $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Die spezielle Lsg. $\cos(\omega t)$ ist bestimmt durch die Anfangswerte $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, und $\sin(\omega t)$ ist bestimmt durch die Anfangswerte $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \omega$.

23.) Man löse das folgende AWP durch einen Potenzreihenansatz um $x = 0$:

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x}, \quad y(0) = y_0,$$

mit beliebig vorgegebenem $y_0 \in \mathbb{R}$.

24.) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz um $x = 1$:

$$xy' - y - x - 1 = 0.$$

Übungsblatt 4 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

25.) Für die mittels Potenzreihenansatz aus der Laguerre-Dgl.

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

gewonnenen Laguerre-Polynome $L_m(x)$ vom Grad m

$$L_m(x) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{n!} x^n$$

zeige man die Darstellung

$$L_m(x) = \frac{e^x}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \left(x^m e^{-x} \right).$$

26.) Man suche mittels Potenzreihenansatz um $x = 0$ die Werte von λ, für welche die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

polynomielle Lösungen besitzt.

Anmerkung: Es läßt sich zeigen (ist hier aber nicht verlangt), daß die Polynome darstellbar sind durch konstante Vielfache der Hermite-Polynome

$$y_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

27.) Man bestimme eine Lösungsbasis der folgenden Differentialgleichung über einen modifizierten Potenzreihenansatz um $x = 0$:

$$2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0.$$

28.) Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, daß $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)x$ reduziere man die Ordnung der Differentialgleichung und ermittle eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

29.) Man betrachte die homogene Eulersche Dgl.

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Mittels Ansatz $y(x) = x^r$ und Lösen der Indexgleichung (wie beim modifizierten Potenzreihenansatz) ermittle man eine Lösung $\varphi_1(x)$ der gegebenen Dgl.
Eine zweite, unabhängige Lösung $\varphi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)\varphi_1(x)$. Man überprüfe die Unabhängigkeit beider Lösungen durch Berechnung der Wronski-Determinante.

30.) Fortsetzung von Bsp. 29.) Man betrachte die inhomogene Eulersche Dgl.

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Durch die Methode der Variation der Konstanten bestimme man die allgemeine Lösung dieser Dgl.
Hinweis: Aus Bsp. 29.) erhält man die Lösungsbasis $\{\frac{1}{x}, \frac{\ln x}{x}\}$.

31.) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

32.) Man bestimme die allgemeine Lösung der Dgl.

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x.$$

Übungsblatt 5 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

33.) Man betrachte die lineare Dgl. 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$(x+3)y'' - (2x+7)y' + 2y = (x+3)^2 e^x.$$

Hier ist es vorteilhaft, die Gleichung unter Zuhilfenahme des Differentialoperators D nach der Variablen x, der einer Funktion $f(x)$ die Aleitung $D(f(x)) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ zuordnet ($D : f(x) \mapsto f'(x), Dy = y', D^2 y = DDy = y''$, etc., es gilt die Produktregel $D(f(x) \cdot g(x)) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$), anzuschreiben:

$$[(x+3)D^2 - (2x+7)D + 2]y = [(x+3)D - 1][D-2]y = (x+3)^2 e^x.$$

Durch die hier mögliche Faktorisierung ergibt sich folgende Lösungsmethode: wähle die Substitution $u(x) := [D-2]y(x) = y'(x) - 2y(x)$ und löse die erhaltene lineare Dgl. 1. Ordnung für $u(x)$:

$$[(x+3)D - 1]u(x) = (x+3)u'(x) - u(x) = (x+3)^2 e^x.$$

Aus der erhaltenen Lösung für $u(x)$ erhält man nach Rücksubstitution eine lineare Dgl. 1. Ordnung für $y(x)$. Lösen derselben liefert die allgemeine Lösung des gestellten Problems.

34.) Man betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0.$$

Wie man sofort nachrechnet, ist eine Lösung dieser Dgl. gegeben durch $y = e^x$. Man finde nun mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)e^x$ eine zweite, unabhängige Lösung dieser Dgl. und damit die allgemeine Lösung.

35.) Man zeige, daß die Ricatti-Dgl.

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad Q(x) \neq 0,$$

durch die Substitution

$$y(x) = \frac{u'(x)}{Q(x)u(x)}$$

in eine lineare Dgl. zweiter Ordnung für $u(x)$ übergeführt wird.

36.) Man löse das AWP

$$y'' + y = \tan(x), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

mittels Variation der Konstanten (eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Dgl ist geg. durch $\{\cos(x), \sin(x)\}$).
Bemerkung: $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C$.

37.) Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L von 0.05 Henry, einem Widerstand R von 20 Ohm, einem Kondensator C von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, daß für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t)$.

38.) Man bestimme die Laplace-Transformierten von folgenden Funktionen.

(a) $f_1(t) = \int_0^t \tau\sin(\tau)d\tau$,

(b) $f_2(t) = \sin^3(t)$.
Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).

39.) Man zeige mittels partieller Integration, daß

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0,\infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0, t>0} f(t)$.

40.) Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9, \ y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

Übungsblatt 6 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

41.) Das Faltungsprodukt $(f*g)(t)$ zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist definiert durch $(f*g)(t) := \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Für die Laplace-Transformation gilt nun die Produktformel $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$, wenn $F(s)$ und $G(s)$ die Laplace-Transformierten von $f(t)$ resp. $g(t)$ bezeichnen. Man ermittle nun die folgenden Faltungsprodukte resp. ihre Laplace-Transformierten:

(a) $1 * 2$,

(b) $e^t * e^{2t}$.

42.) Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:

(a) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$,

(b) $F(s) = \frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$.

Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heaviside'schen Sprungfunktion.

43.) Man löse folgendes AWP mittels L-Transformation:

$$y'' + 2y' - 3y = 6\sinh(2t), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 4.$$

Bemerkung: $\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

44.) Man zeige: Ist $f(t)$ periodisch mit Periode p, d. h. $f(t+p) = f(t)$ für alle t, dann gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_{t=0}^{p} e^{-st} f(t)dt.$$

Anmerkung: Man verwende $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}dt$ und substituiere geeignet.

45.) Man löse mittels L-Transformation die folgende Differential-Integralgleichung:

$$0 = \dot{y}(t) + \int_{\tau=0}^{t} y(\tau)\cosh(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

46.) Man löse mit Hilfe der L-Transformation folgendes AWP (lineare Dgl. mit nichtkonstanten Koeffizienten):

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Anmerkung: Durch die L-Transformation erhält man im Bildbereich eine lineare Dgl. 1. Ordnung. Die in der allgemeinen Lösung auftretende Konstante bestimme man dadurch, daß $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der L-transformierbaren Fkt. $y(t)$ sein soll und daher $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ gelten muß.

47.) Man löse das (eindeutig bestimmte) RWP

$$\ddot{y} - y = 0, \quad y(0) + \dot{y}(0) = 2, \; y(0) + y(1) = 4,$$

indem man die allgemeine Lösung der Dgl. bestimmt und die Unbestimmten an die Randbedingungen anpaßt.
Ist das RWP für alle Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ für Randbedingungen $y(0)+\dot{y}(0) = a$, $y(0)+y(1) = b$ eindeutig lösbar?

48.) Man betrachte das RWP

$$\ddot{y} - y = at + b, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 0,$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Alternativsatzes zeige man, daß das RWP für jede Wahl von a, b eindeutig lösbar ist.

Übungsblatt 7 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

49.) Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' + y = b(x), \quad y(0) - y(\pi) = 0, \quad y'(0) - y'(\pi) = 0.$$

50.) Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' = b(x), \quad y(0) + y(l) = 0, \quad y'(0) + y'(l) = 0.$$

51.) Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' + 2y' + y = b(x), \quad y'(0) + y'(1) = 0, \quad y(0) + y(1) + y'(0) = 0.$$

52.) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen des linearen Eigenwertproblems

$$y'' - \lambda^2 y = 0, \quad y(1) = y(-1), \quad y'(1) = y'(-1).$$

53.) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen des linearen Eigenwertproblems

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0.$$

54.) Man bestätige über die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, daß das folgende Eigenwertproblem keinen Eigenwert besitzt.

$$y^{(4)} = -\lambda y'', \quad y''(0) = y^{(3)}(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

55.) Man löse explizit mit dem Ansatz $y = e^{\alpha \ln x}$ das Eigenwertproblem

$$-(xy')' = \frac{\lambda}{x} y, \quad 1 < x < 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

56.) Man betrachte das Eigenwertproblem

$$y^{(3)} + \lambda y'' + \lambda^2 y' + \lambda^3 y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 0$$

und bestimme über die allgemeine Lösung der Differentialgleichung eine Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte (= Eigenwertgleichung).

Übungsblatt 8 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

57.) Unter Zuhilfenahme der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

bestimme man die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}.$$

Anmerkung: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

58.) Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

Anmerkung: Selbstverständlich ist wahlweise die reelle oder die komplexe Fourier-Reihe zu bestimmen, wodurch dann mit den Beziehungen $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ die andere ebenfalls erhalten wird.

59.) Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

60.) Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t^2, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

61.) Zeige, daß eine gerade T-periodische Funktion ($f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Sinus-Ausdrücke enthalten kann.

62.) Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \leq t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, das heißt man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade, $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0. \end{cases}, \quad h(t + 2T) = h(t).$$

63.) Man entwickle die Funktion

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \le t < \pi,$$

in eine Fourier-Cosinus-Reihe. Dies erreicht man hier, indem man $f(t)$ gerade mit Periode $T = \pi$ fortsetzt und die (gewöhnliche) Fourier-Reihe berechnet.

64.) Man zeige, daß für die Fouriermatrix F_N:

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

mit $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N.$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die N-te Einheitsmatrix.
Anmerkung: Das Element in der r-ten Zeile und s-ten Spalte der Matrix $F_N \cdot \overline{F_N}$ berechnet sich durch

$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{k(r-1)} \cdot w^{-k(s-1)}.$$

Man unterscheide nun $r = s$ und $r \neq s$.

Übungsblatt 9 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

65.) Seien $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^N$ und $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte, außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die N-periodische Fortsetzung des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Man zeige dann, daß für die sogenannte "Periodische Faltung" gilt:

$$\vec{y} * \vec{z} := \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l z_{k-l} \right)_k \xrightarrow{DFT} \left(c_k \cdot d_k \right)_k.$$

66.) Man berechne die Spektralkoeffizienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, N-2$.

67.) Zur Fourier-Transformation: Man berechne die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

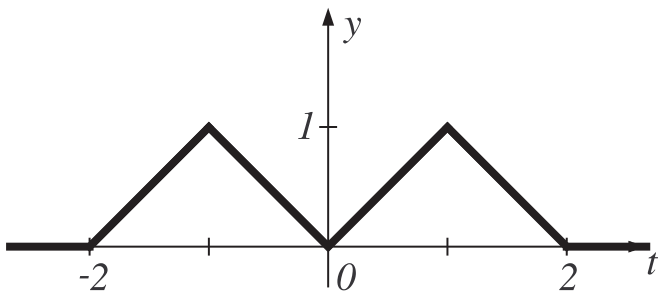
68.) Man berechne die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

69.) Man zeige: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, also $f(t) = f(-t)$, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt.$$

70.) Unter Berücksichtigung von 69.) berechne man die Fourier-Transformierte für die nachfolgend skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



Übungsblatt 10 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

71.) Gesucht ist das trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad n, welches im Intervall $[0, 2\pi]$ an den 3 Stützstellen $t_j = j\frac{2\pi}{3}$ für $j = 0, 1, 2$ die vorgegebenen Funktionswerte $y(t_j)$ annimmt:

$$y(0) = 0, \quad y\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der "Sinus-Cosinus"-Darstellung.

72.) Unter den Voraussetzungen, daß $f(t)$ resp. $g(t)$ absolut integrierbar seien, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ resp. $G(\omega)$ bezeichnen die Transformierten von $f(t)$ resp. $g(t)$).

(a) Faltung: Das Faltungsprodukt $(f \star g)(t)$ sei definiert durch

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Dann gilt:

$$\mathcal{F}\big\{(f \star g)(t)\big\} = F(\omega)G(\omega).$$

(b) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{F}\big\{f(ct)\big\} = \frac{1}{|c|} F\Big(\frac{\omega}{c}\Big).$$

73.) Unter Verwendung des Fourier-Integraltheorems und der in der Vorlesung hergeleiteten Transformierten des Rechteckimpulses zeige man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-i\omega x} d\omega = \begin{cases} \pi, & \text{für } |x| < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{für } |x| = 1, \\ 0, & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Was ergibt das Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega$?

Übungsblatt 11 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

74.) Man löse die folgende PDG für $u(x, y)$ durch Zurückführen auf eine gewöhnliche DGL:

$$u_{xy} + u_x + x + y = 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0.$$

75.) Man löse die folgende PDG für $u(x, y)$ durch Zurückführen auf eine gewöhnliche DGL:

$$u_{xy} + yu_x = 0, \quad u(x, x) = x^2, \quad u_x(x, x) = u_y(x, x).$$

76.) Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x, y)$ der PDG

$$9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x.$$

Bemerkung: Siehe Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

77.) Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x, y)$ der PDG

$$12u_x + 4u_y = x.$$

Bemerkung: Siehe Lösung von PDG 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten.

78.) Man betrachte die PDG 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten in 3 Variablen:

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x, y, z).$$

Man weise nach, daß durch die Substitutionen

$$\xi = x, \quad \eta = bx - ay, \quad \zeta = cx - az$$

die Reduktion auf folgende DGL für $U(\xi, \eta, \zeta) := u(x, y, z)$ gelingt:

$$aU_\xi = f\Big(\xi, \frac{b\xi + \eta}{a}, \frac{c\xi + \zeta}{a}\Big).$$

Damit bestimme man die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

79.) Durch die Substitution $u(x,y) = v(x,y)e^{\lambda x+\mu y}$ und geeignete Wahl von λ, μ eliminiere man die ersten Ableitungen (u_x und u_y) aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Selbstverständlich brauchen Sie die entstehende PDG nicht zu lösen, sondern nur anzugeben.

80.) Man betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \vec{0}, \quad \text{wobei } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 - 5x_2 + 1, & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x_2} &= 5x_1 + x_2, & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse nun dieses DGL-System auf folgende Weise (Eliminationsmethode). Zuerst eliminiere man x_2 aus dem Gleichungssystem: Ableiten von

$$x_2 = \frac{-\dot{x_1} + x_1 + 1}{5}$$

und einsetzen in die zweite Gleichung liefert eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für x_1. Man bestimme die allg. Lösung dieser DGL für x_1 und durch Rücksubstitution auch die allg. Lösung für x_2. Anpassen an die Anfangsbedingungen liefert schließlich die gesuchte Lösung.

Übungsblatt 12 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

81.) Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen PDG 1. Ordnung

$$x\,u_x - y\,u_y = xy.$$

82.) Man bestimme die allgemeine Lösung der Rumpf-DGL

$$u_x + (y+2z)\,u_y + z\,u_z = 0.$$

83.) Man löse mittels Laplace-Transformation von $u(x,t)$ bezüglich t folgende PDG:

$$x\,u_x + u_t = xt, \quad u(0,t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x,0) = 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Bemerkung: Laplace-Transformation bezüglich t liefert für $U(x,s) := \mathcal{L}\big(u(x,t)\big)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$x\,U_x + s\,U = \frac{x}{s^2}.$$

Lösen dieser DGL und Berücksichtigen der Anfangswerte liefert nach der Rücktransformation die gesuchte Lösung.

84.) Man betrachte das System von partiellen DGL für $z = z(x,y)$:

$$y\,z_x - x\,z_y = 0, \quad z_{xy} = 0.$$

Man bestimme nun die Funktionen $z(x,y)$ welche dieses System lösen.
Bemerkung: Man bestimme für eine der beiden partiellen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung und setze in die andere PDG ein. Dies bestimmt die zunächst unbekannte(n) Funktion(en).

85.) Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x,y)$ der linearen PDG:

$$(x^2+1)\,u_x - 2xy\,u_y + 2x\,u + 1 = 0.$$

86.) Eine Funktion $u(x, y)$ heißt *homogen* vom Grad n, wenn

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y).$$

Durch differenzieren nach λ zeige man: falls u eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen PDG 1. Ordnung

$$x\, u_x + y\, u_y = n\, u.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser PDG?

87.) Man bestimme das Gebiet, in dem die PDG 2. Ordnung

$$u_{xx} + y\, u_{yy} + \frac{1}{2}\, u_y = 0$$

hyperbolisch ist und bestimme dort die allgemeine Lösung.