Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (WS 2017/18)
Lösungen

Aufgabe 3.1 Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden. *Hinweis:* Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x ist eine Großmutter von y.

b) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x hat eine Tochter.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $y^2 \leq x \leq y^3$.

d) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: x ist eine Quadratzahl.

e) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: Wenn x größer gleich 2 ist, dann ist y echt kleiner als das Dreifache von z.

f) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Wenn x mindestens 2 Stackelemente (Binärzeichen) enthält, dann ist y leer.

Lösung 1

a) $\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{\vee}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$

b) Man kann zwar einen Booleschen Ausdruck angeben, der ausdrückt, dass y die Tochter von x ist; aber um das *einstellige* Prädikat 'hat eine Tochter' auszudrücken benötigt man einen Existenzquantor.

c) $\underline{\neg}\underline{(}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{,}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{\vee}\underline{\leq}\underline{(}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{,}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}$

d) "x ist eine Quadratzahl" lässt sich in üblicher mathematischer Notation als $\exists y\ x = y \cdot y$ schreiben. Der Existenzquantor ist nicht eliminierbar; daher gibt es keinen entsprechenden Booleschen Ausdruck.

e) Eine Wenn-Dann-Beziehung (Implikation) zwischen A und B lässt sich als "nicht A oder B" ausdrücken. Außerdem erhält man "kleiner" als Negation von "größer gleich". Damit ergibt sich folgende Lösung: $\underline{(}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{1}\underline{)}\underline{)}\underline{\vee}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$.
Anmerkung: Man könnte "das Dreifache von z" auch mit dem Term $\underline{*}\underline{(}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{1}\underline{)}\underline{)}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}$ ausdrücken; aber jedenfalls ist 3 keine Konstante des Datentyps $\mathbb{N}$.

f) $\underline{(}\underline{\mathrm{istleer?}}\underline{(}\underline{\mathrm{pop}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}\underline{\vee}\underline{\mathrm{istleer?}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}$

Aufgabe 3.2 Betrachten Sie die Modellstruktur (Datentyp) $\mathbb{U} = \langle \{\underline{1}\}^*; \{\}, \{\varepsilon, \underline{1}\}, \{c\} \rangle$ für unäre Strings. Dabei ist c die 2-stellige Konkatenationsfunktion für Strings. Die Signatur $\Sigma(\mathbb{U})$ wird wie auf den Vorlesungsfolien, also durch Unterstreichung der jeweiligen Zeichen gebildet. Entsprechend heißen die beiden Konstantensymbole $\underline{\varepsilon}$ bzw. $\underline{1}$.

a) Geben Sie 3 verschiedene Terme aus $\mathcal{T}(\mathbb{U})$ an, die in jeder Umgebung den Unärstring $\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}$ darstellen. Vermeiden Sie dabei die Verwendung der Konstante $\underline{\varepsilon}$.

b) Wenn $t \in \mathcal{T}(\mathbb{U})$ keine Variablen enthält, dann bezeichnen wir den dargestellten Unärstring mit $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)$ (lassen also die hier irrelevante Variablenbelegung weg). Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass für solche Terme die Länge des Unärstrings $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)$ durch $|t|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$ beschränkt ist. ($|t|_{\underline{\mathtt{c}}}$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Funktionssymbols $\underline{\mathtt{c}}$ im Term t.)

c) Formulieren Sie ein $AL(\mathbb{U})$-Programm, das der Variable $\underline{\mathtt{y}}$ denjenigen String zuweist, der genau ein Symbol weniger enthält, als der String der anfangs der Variable $\underline{\mathtt{x}}$ zugewiesen ist. In einer Umgebung I in der $I(\underline{\mathtt{x}}) = \varepsilon$ gilt, soll das Programm nicht terminieren.

d) Werten Sie ihr Programm schrittweise in einer Umgebung I aus, für die $I(\underline{\mathtt{x}}) = \underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}$ und $I(v) = \varepsilon$ für alle $v \neq \underline{\mathtt{x}}$ gilt.

Lösung 2

a) $t_1 = \underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}}))))))$
$t_2 = \underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}}),\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}})),\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}}))$
$t_3 = \underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}}),\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}}),\underline{\mathtt{c}}(\underline{\mathtt{1}},\underline{\mathtt{1}})))$

b) Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t.

Induktionsanfang. Es gibt folgende zwei Fälle (weil t variablenfrei ist).
$t = \underline{\varepsilon}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t) = \varepsilon$, daher $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| = 0$ und $|t|_{\underline{\mathtt{c}}} = 0$ und somit $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| \leq |t|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$.
$t = \underline{\mathtt{1}}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t) = \underline{\mathtt{1}}$, daher $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| = 1$ und $|t|_{\underline{\mathtt{c}}} = 0$ und somit $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| \leq |t|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$.

Induktionsschritt. Es sei $t = \underline{\mathtt{c}}\,(\,t_1\,,t_2\,)$ (einen anderen Fall gibt es nicht).
Die *Induktionsannahme* besagt, dass $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t_i)| \leq |t_i|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$ für $i \in \{1, 2\}$.
Außerdem gilt für die jeweils dargestellten Unärstrings $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t_1)\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t_2)$ und daher $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| = |\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t_1)| + |\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t_2)|$. Daher folgt aus der Induktionsannahme $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| \leq |t_1|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1 + |t_2|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$. Es gilt außerdem $|t|_{\underline{\mathtt{c}}} = 1 + |t_1|_{\underline{\mathtt{c}}} + |t_2|_{\underline{\mathtt{c}}}$. Insgesamt erhalten wir wie gefordert $|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(t)| \leq |t|_{\underline{\mathtt{c}}} + 1$.

c) $\underline{\text{begin}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon}\,\underline{;}\underline{\text{while}}\,\underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{do}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{end}}$

d)
$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{begin}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon}\,\underline{;}\underline{\text{while}}\,\underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{do}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{end}})\\
\overset{MAL2}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\text{while}}\,\underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{do}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{end}}),\\
& \text{wobei } I' = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon}),\ \text{daher } I'(\underline{\mathtt{y}}) = \varepsilon \text{ und } I'(\underline{\mathtt{x}}) = I(\underline{\mathtt{x}}) = \underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\\
& [\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{x}})\underline{\neq}\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{y}})\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{1}})] = [\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\underline{\neq}\varepsilon\underline{\mathtt{1}}] = [\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\underline{\neq}\underline{\mathtt{1}}] = \mathbf{t}\ ]\\
\overset{MAL4}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\text{while}}\,\underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{do}}\,\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)\,\underline{\text{end}})\\
& \text{wobei } I'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\mathtt{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)),\\
& \text{daher } I''(\underline{\mathtt{y}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{y}})\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{1}}) = \varepsilon\underline{\mathtt{1}} = \underline{\mathtt{1}}\\
& \text{und } I''(\underline{\mathtt{x}}) = I'(\underline{\mathtt{x}}) = I(\underline{\mathtt{x}}) = \underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\\
& [\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{\mathtt{x}}\underline{\neq}\,\underline{\mathtt{c}}\,(\underline{\mathtt{y}}\,,\underline{\mathtt{1}}\,)) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathtt{x}})\underline{\neq}\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathtt{y}})\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathtt{1}})] = [\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\underline{\neq}I''(\underline{\mathtt{y}})\underline{\mathtt{1}}] = [\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{1}}\underline{\neq}\underline{\mathtt{1}}\underline{\mathtt{1}}] = \mathbf{f}\ ]\\
\overset{MAL4}{=}\ & I''
\end{aligned}
$$

Hinweis: *Im Unterschied zu den beiden ersten Aufgaben dürfen und sollen Sie für die verbleibenden drei Aufgaben von allen vereinbarten Notationsvereinbarungen und Klammereinsparungsregeln Gebrauch machen, sowie auch Unterstreichungen zur Syntaxkennzeichnung weglassen.*

Aufgabe 3.3 Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als PL-Formeln über der jeweiligen Signatur zum betroffenen Datentyp aus.

a) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x ist zweifache Mutter (hat also genau 2 Kinder).

b) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x hat keine Tante, aber einen Onkel.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{U}$ (siehe Aufgabe 3.2): y hat die achtfache Länge von x. (Versuchen Sie mit 3 Vorkommen des Funktionssymbols c auszukommen.)

d) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: Es gibt unendlich viele Zahlen die ganzzahlig durch x teilbar sind.

Lösung 3

a) $\exists y \exists z [y \neq z \wedge x = \mathit{Mutter}(y) \wedge x = \mathit{Mutter}(z) \wedge \forall u (x = \mathit{Mutter}(u) \supset (u = y \vee u = z))]$

b) $\neg\exists y(\mathit{weiblich}(y) \wedge (\mathit{Geschwister}(\mathit{Mutter}(x), y) \vee \mathit{Geschwister}(\mathit{Vater}(x), y))) \wedge \exists y\, \mathit{Onkel}(y, x)$

c) $\exists u \exists v(u = c(x, x) \wedge v = c(u, u) \wedge y = c(v, v))$

d) $\forall y \exists z(y < z \wedge \exists u\, z = x * u)$

Aufgabe 3.4 Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.

a) Kein Hund liebt alle Katzen, aber manche Hunde lieben wenigstens eine Katze.

b) Es gibt mindestens zwei Meetings, die von Charlie geleitet werden, falls sie nicht von Hadija geleitet werden können.

c) Adam und Eva sind Vater bzw. Mutter von genau einem gemeinsamen Kind.

d) Eva wird von allen anderen Personen, die in ihrer Firma arbeiten, bewundert.

Lösung 4

a) Signatur $\langle\{K, H, L\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$H(x)$ ... x ist ein Hund (einstellig)
$K(x)$ ... x ist eine Katze (einstellig)
$L(x, y)$ ... x liebt y (zweistellig)

PL-Formel: $\neg\exists x[H(x) \wedge \forall y(K(y) \supset L(x, y)) \wedge \exists x[H(x) \wedge \exists y(K(y) \wedge L(x, y))]$

b) Signatur $\langle\{M, L, Kl\}, \{c, h\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$M(x)$ ... x ist ein Meeting (einstellig)
$L(x, y)$ ... x leitet y (zweistellig)
$Kl(x, y)$ ... x kann y leiten (zweistellig)
Konstantensymbole:
c ... Charlie
h ... Hadija

PL-Formel: $\exists x \exists y[M(x) \wedge M(y) \wedge x \neq y \wedge (\neg Kl(h, x) \supset L(c, x)) \wedge (\neg Kl(h, y) \supset L(c, y))]$

c) Signatur $\langle\{\}, \{a, e\}, \{v, m\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Funktionssymbole:
$v(x)$ ... der Vater von x (einstellig)
$m(x)$ ... die Mutter von x (einstellig)
Konstantensymbole:
a ... Adam
e ... Eva

PL-Formel: $\exists x[a = v(x) \wedge e = m(x) \wedge \neg\exists y(x \neq y \wedge a = v(y) \wedge e = m(y))]$
oder (z.B.) $\exists x[a = v(x) \wedge e = m(x) \wedge \forall y((a = v(y) \wedge e = m(y)) \supset x = y)]$

Erläuterungen: Die Relationen “ist Vater von” und “ist Mutter von” sind funktional. Daher ist es, wie in der Vorlesung besprochen, besser entsprechende einstellige Funktionssymbole, anstatt zweistellige Prädikatensymbole in die Signatur zu stellen.

d) Signatur $\langle\{P, B, A\}, \{e\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$P(x)$ ... x ist eine Person (einstellig)
$B(x, y)$ ... x wird von y bewundert (zweistellig)
$A(x, y)$ ... x arbeitet in Firma y (zweistellig)
Konstantensymbol:
e ... Eva

PL-Formel: $\exists x[A(e, x) \wedge \forall y((P(y) \wedge A(y, x) \wedge y \neq e) \supset B(y, e))]$

Aufgabe 3.5 Zur Erinnerung: Unsere axiomatische Theorie der Gruppen hat folgende 3 Axiome.
ass: $\forall x \forall y \forall z\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Assoziativität)
rn: $\forall x\, x \circ e = x$ (rechtsneutrales Element)
ri: $\forall x \exists y\, x \circ y = e$ (Existenz eines rechtsinversen Elements)
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) Das Axiom ass ist unabhängig von den beiden anderen Axiomen.

b) Das Axiom ri ist unabhängig von den beiden anderen Axiomen.

Lösung 5

a) Wir müssen zeigen, dass $rn, ri \not\models ass$ und $rn, ri \not\models \neg ass$ gilt.

Die letztere Behauptung folgt unmittelbar aus der Existenz von Gruppen. Genauer: Wir erhalten ein Modell $\mathcal{I}$ der Axiome rn, ri und ass, indem wir beispielsweise die additive Gruppe der ganzen Zahlen als $\mathcal{I} = \langle Z, \Phi, \xi\rangle$ darstellen, wobei $\Phi(\circ) = +$ und $\Phi(e) = 0$ gilt (da die Axiome geschlossene Formeln sind, ist ξ beliebig). Weil $\mathcal{I}$ nicht nur rn und ri, sondern auch ass erfüllt, gilt $rn, ri \not\models \neg ass$.

Für die erste Behauptung, also $rn, ri \not\models ass$, müssen wir eine Interpretation $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$ finden, die rn und ri wahr, aber ass falsch macht. Dafür eignet sich eine Interpretation über den natürlichen Zahlen, in der das Funktionssymbol $\circ$ als $\dot{-}$ und die Konstante e als die Zahl 0 interpretiert wird. Wir wählen also $D = \omega$, $\Phi(\circ) = \dot{-}$ und $\Phi(e) = 0$. (Die Variablenbelegung ξ ist irrelevant, da die Axiome keine freien Variablen enthalten.) In $\mathcal{I}$ ist ass falsch da $\dot{-}$ nicht assoziativ ist: z.B. gilt $((2 \dot{-} 1) \dot{-} 1) \neq (2 \dot{-} (1 \dot{-} 1))$. Wir haben also $\mathrm{val}_{\mathcal{I}}(ass) = \mathbf{f}$. Die Formel rn hingegen evaluiert in $\mathcal{I}$ zu $\mathbf{t}$ (wahr), da $n \dot{-} 0 = n$ für alle $n \in \omega$ gilt. Ebenso ist ri wahr unter $\mathcal{I}$, da $n \dot{-} n = 0$ gilt. Mit anderen Worten: Jede Zahl ist bezüglich $\dot{-}$ und 0 ihr eigenes rechtsinverses Element.

b) $ass, rn \not\models \neg ri$ folgt wiederum unmittelbar aus der Existenz von Gruppen.

Um $ass, rn \not\models ri$ zu zeigen, wählen wir $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi\rangle$ mit $\Phi(\circ) = +$ und $\Phi(e) = 0$. (ξ ist wieder beliebig.) $+$ ist assoziativ und hat 0 als (rechts)neutrales Element. Aber es gibt nicht zu jedem $n \in \omega$ ein $m \in \omega$, sodass $n + m = 0$.