1) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 3^n,$$

zu den Anfangsbedingungen $x_0 = x_1 = 0$.

(8 Punkte)

Lösung: Die charakteristische Gleichung lautet

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ und hat die Lösungen

$${}_1\lambda_2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}, \text{ also } \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 2.$$

Somit hat die homogene Gleichung

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$$

die allgemeine Lösung

$$x_n^{(h)} = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot 2^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit der Störfunktion $s_n = 3^n$ machen wir den Ansatz $x_n^{(p)} = A \cdot 3^n$, $A \in \mathbb{R}$, und setzen diesen in die gegebene Differenzengleichung ein:

$$A \cdot 3^{n+2} - 7A \cdot 3^{n+1} + 10A \cdot 3^n = 3^n.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$A \cdot 3^n \cdot (9 - 7 \cdot 3 + 10) = 3^n, \text{ also } -2A = 1, \ A = -\frac{1}{2}.$$

Somit ist $x_n^{(p)} = -\frac{1}{2} \cdot 3^n$ die gesuchte partikuläre Lösung und

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot 2^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

die Lösungsgesamtheit der gegebenen Differenzengleichung.

Setzen wir $n=0$ bzw. $n=1$, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$x_0 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0,$$
$$x_1 = 5c_1 + 2c_2 - \frac{3}{2} = 0$$

Subtrahieren wir das 2-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung, so ergibt sich:

$$3c_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{also } c_1 = \frac{1}{6}.$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Daher ist die gesuchte Lösung gegeben durch:

$$x_n = \frac{1}{6}\cdot 5^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{2}\cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) a) Zeigen Sie, dass W KEIN Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass W EIN Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$

(3 Punkte)

Lösung: a) Es ist z. B.

$(1,0,0) \in W$ und $(0,0,1) \in W$, aber

$(1,0,1) = (1,0,0) + (0,0,1) \notin W$.

b) Es ist $W \neq \emptyset$, da $(0,0,0) \in W$.

Seien $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$, dann gilt:

$x_1 + 2y_1 + 3z_1 = x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0$.

Addition der beiden Gleichungen liefert:

$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$, also ist

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$

$= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$.

Sei $(x, y, z) \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda z = \lambda \cdot (x + 2y + 3z) = \lambda \cdot 0 = 0$,

also $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda \cdot (x, y, z) \in W$.

Nach Buch Seite 105 ist daher

W ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.

3) Sei $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{11}\}$ die Menge der Restklassen modulo 12 und $U = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$. Bestimmen Sie die Elemente und die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

Lösung:

(7 Punkte)

Wir lassen bei den Restklassen modulo 12 die Querstriche weg und haben dann als Nebenklassen des Normalteilers U in der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$:

$0+U = U = \{0, 4, 8\}$, $1+U = \{1, 5, 9\}$,

$2+U = \{2, 6, 10\}$ und $3+U = \{3, 7, 11\}$.

Es ist dann die Faktorgruppe von $\mathbb{Z}_{12}$ nach U gegeben durch

$$\mathbb{Z}_{12}/U = \{U, 1+U, 2+U, 3+U\}$$

mit der Operationstafel (Gruppentafel):

$+$	U	$1+U$	$2+U$	$3+U$
U	U	$1+U$	$2+U$	$3+U$
$1+U$	$1+U$	$2+U$	$3+U$	U
$2+U$	$2+U$	$3+U$	U	$1+U$
$3+U$	$3+U$	U	$1+U$	$2+U$