ADM-Prüfung BG 03.02.15 – Beispiel 1

Lösungen ohne Garantie!

Seien k und n zwei positive natürliche Zahlen.

Wie viele Funktionen $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, sodass

a) $1 \leq f(1), f(2), \ldots, f(k) \leq n$,

b) $1 \leq f(1) < f(2) < \cdots < f(k) \leq n$ bzw.

c) $1 \leq f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k) \leq n$

gilt?

Alle antworten müssen begründet werden!
(In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

Frage A

Ein Beispiel für solch eine Funktion wäre:

$$f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 5, 4 \mapsto 2$$

Man könnte diese auch einfach als Zahlenfolge „1252" schreiben. Es sind also k-stellige Ziffernfolgen (mit Ziffern aus der Menge {1,..,n}) gesucht, wobei alle Elemente mindestens 1 und maximal n sein dürfen.

Diese Bedingung trifft aber sowieso auf alle Elemente aus {1,…,n} zu. Von daher kann man das hier als simple Kombination mit Wiederholung auffassen. Denn alle k-stelligen Zahlenfolgen („1234", „5431", „3333"…) erfüllen diese Bedingung. Die Formel zur Berechnung lautet also:

$$n^k$$

Da wir an jeder der k Stellen aus n Elementen auswählen können.

Frage B

Hier steht, dass jedes Element kleiner als das nächste Element sein muss und die Zahlen insgesamt im Intervall von 1 – n liegen müssen. Ein Beispiel für so eine Funktion wäre:

$$\text{f}: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 5, 4 \mapsto 6$$

Als Ziffernfolge einfach „1256" geschrieben. „1254" beispielsweise würde die verlangte Regel verletzen.

Es fällt hier auf, dass in diesem Fall n größer oder gleich k sein muss, da es sonst ein Element aus der Definitionsmenge gäbe, dem kein Element aus der Zielmenge zugewiesen werden kann.

Wir müssen also die Anzahl aller k-stelligen Ziffernfolgen berechnen, wobei die Ziffern größer oder gleich 1 und kleiner oder gleich n sind, und aufsteigend sortiert sind. Alle Ziffern müssen daher auch verschieden sein.

Dies lässt sich wahrscheinlich am einfachsten lösen, indem man feststellt, dass es ausreicht, einfach irgendwelche k Elemente aus der Zielmenge auszuwählen (Bei Auswahlen ist die Reihenfolge egal). Die ausgewählten Elemente kann man nun einfach so sortieren, dass sie der Regel entsprechen. Wähle ich z.B. {1, 2, 4, 6} aus, weiß ich sofort, dass die verlangte Reihenfolge „1246" ist. Es gibt aber keine andere Teilmenge, die ebenfalls auf „1246" führen würde. Da Teilmengen auch keine Elemente doppelt enthalten, sind auch sicher alle Elemente unterschiedlich und ungleich.

Die Antwort ist also eine simple Auswahl einer Teilmenge:

$$\binom{n}{k}$$

Ich wähle aus n Elementen k Elemente aus, sortiere sie entsprechend, und ich habe eine gültige Zahlenfolge, welche sich durch solch eine Funktion repräsentieren lässt.

Frage C

Hier ist verlangt, dass jedes Element kleiner oder gleich dem nächsten sein muss. Jetzt sind also nicht nur mehr Zahlenfolgen wie „12345“ sondern auch „12245“ oder „22222“ erlaubt. Der Unterschied zu B ist hier nun, dass man nicht eine normale Teilmenge auswählt, sondern eine Teilmultimenge. Die Formel lautet also wie immer bei Teilmultimengenauswahl:

$$\binom{n+k-1}{k}$$