4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 1 + 2 WS 2020 12. April 2021

Sie haben 90 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben beider Angabenteile.
(Teil1: Aufgaben 1-4, Teil2: Aufgaben 5-8) Viel Erfolg!

1.) Sei $L = \{p\underline{\mathtt{a}}^{2k}q \mid p,q \in \{\underline{\mathtt{b}},\underline{\mathtt{c}}\}^*,\ |p| = |q|,\ k \geq 1\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

2.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^{4k}\underline{\mathtt{d}}^n \mid n,k \geq 0\}$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.
(D_n bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschiedenen Klammerpaaren.)

(4 Punkte)

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt. **(2 Punkte)**

c) Ist L in polynomieller Zeit von einer nicht-deterministischen Turingmaschine (NTM) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

3.)

a) Argumentieren Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass folgendes Problem nicht entscheidbar ist:

> Wird die von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{\mathtt{1}}\}$ auch von einem Kellerautomaten akzeptiert?

Geben Sie dabei insbesondere eine konkrete Sprache L_1 an, die die entsprechende Eigenschaft hat, sowie eine konkrete Sprache L_2, die die entsprechende Eigenschaft nicht hat.

(5 Punkte)

b) Geben Sie für die unter a) gefundenen Sprachen L_1 und L_2 jeweils an, ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar und/oder rekursiv aufzählbar sind.
(Es reicht z.B., *sämtliche* Markierungen in einer der untenstehenden ähnlichen Tabelle vorzunehmen.)

	regulär	kontextfrei	kontextsensitiv	rekursiv	rekursiv aufzählbar
L_1					
L_2					

(3 Punkte)

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

a) Falls $A \leq L_u$ und $\overline{A} \leq L_u$, dann ist A entscheidbar. (L_u bezeichnet das Halteproblem.)

b) Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathbf{P}$.

c) Wenn $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co\text{-}NP}$ dann gilt: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(6 Punkte)

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur – gemeinsam für beide Sätze – und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Devi ist eine Studierende, die jede Prüfung außer *Analysis_2* besteht.
(*Devi is a student who passes every exam except Analysis_2.*)

(2) Manche Prüfung wird nur von genau einer Studierenden bestanden.
(*Some exams are only passed by exactly one student.*)

(7 Punkte)

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\exists x[(P(x,y) \supset \forall z Q(a,f(z))) \vee (Q(z,a) \supset \forall y P(y,x))]$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifieren Sie beide Interpretationen vollständig und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus den Annahmen $\forall x \exists y P(x,y)$ und $\forall x \forall y[P(x,y \supset (x = y \vee \forall z\, z = f(y))]$, folgt logisch $\exists x(\neg P(a,a) \supset P(a,f(x)))$.
Kennzeichnen Sie alle γ- und δ-Formeln als solche und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln. **(8 Punkte)**

8.) Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.
(Punkte gibt es nur für hinreichend begründete und korrekte Antworten.)
Hinweis: Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren.

- Das Programm $\{\, x < 2 \,\}$ `while` $y < 2x$ `do begin` $y \leftarrow y + 2x$ `end` $\{\, y \geq x \,\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ partiell, aber nicht total korrekt.
- Folgende Aussage gilt für alle P, Q und α bezüglich partieller, aber nicht bezüglich totaler Korrektheit: $\{\, \neg R \vee P \,\}$ `while` $R \vee \neg P$ `do` α $\{\, P \,\}$.

(8 Punkte)