Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und WI - UE-Test 1 - Gruppe N

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [7 Punkte] Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = 1 - \frac{2}{(n+1)\,(n+2)}.$$

Dabei müssen alle Elemente eines Induktionsbeweises angeführt und die kennengelernten Bezeichnungen angegeben werden.

(2) [6 Punkte] Man ermittle alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$iz^2 + 2z - 2i = 0$$

und gebe diese sowohl in kartesischer Form als auch in Polarform an.

(3) [7 Punkte] Überprüfen Sie mit Hilfe einer Elementtabelle die Gültigkeit der nachfolgend angegebenen Mengeninklusion (wobei Δ die symmetrische Differenz von Mengen bezeichnet). Geben Sie dabei unbedingt an, wie Sie aus der Elementtabelle dies entscheiden können.

$$(A \cup B)\,\Delta\,(A \cup C) \subseteq A \cup (B\,\Delta\,C).$$

ADM 1. ÜBUNGSTEST

1) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^4 = -16i,$$

und stellen Sie diese in Polarkoordinaten dar.

3) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ die folgendes Kongruenzgleichungssystem erfüllen:

$$3x \equiv 9 \mod 11.$$

Key words and phrases. Insert keywords.

Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und WI - UE-Test 1 - Gruppe Q

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [7 Punkte] Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{4^k} = \frac{4}{9} - \frac{3n+4}{9 \cdot 4^n}.$$

Dabei müssen alle Elemente eines Induktionsbeweises angeführt und die kennengelernten Bezeichnungen angegeben werden.

(2) [6 Punkte] Man ermittle alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$iz^2 - 2z - 2i = 0$$

und gebe diese sowohl in kartesischer Form als auch in Polarform an.

(3) [7 Punkte] Überprüfen Sie mit Hilfe einer Elementtabelle die Gültigkeit der nachfolgend angegebenen Mengeninklusion (wobei Δ die symmetrische Differenz von Mengen bezeichnet). Geben Sie dabei unbedingt an, wie Sie aus der Elementtabelle dies entscheiden können.

$$(A \,\Delta\, B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und WI - UE-Test 1 - Gruppe R

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [7 Punkte] Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Dabei müssen alle Elemente eines Induktionsbeweises angeführt und die kennengelernten Bezeichnungen angegeben werden.

(2) [7 Punkte]
   (a) Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimme man den $\mathrm{ggT}(108, 78)$.
   (b) Unter Benützung von Punkt (a) ermittle man ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ (diese müssen explizit angegeben werden!), sodass:

$$108\,x + 78\,y = 6.$$

(3) [6 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Kongruenzen bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit in $\mathbb{Z}$:
   (a) $6x \equiv 3 \bmod 12$.
   (b) $6x \equiv 3 \bmod 11$.