

Name:

Matrikelnummer:

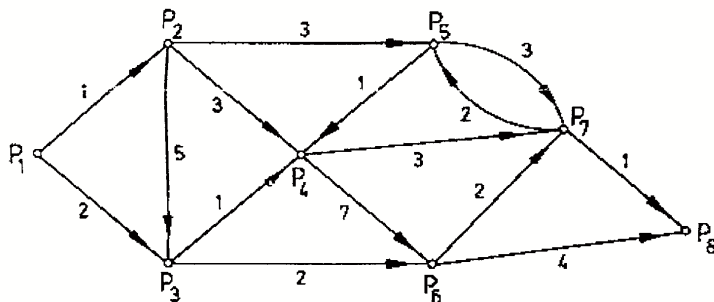
**Algebra und Diskrete Mathematik für Inf. und Winf.**

**(Prof. Karigl)**

**Schriftliche Prüfung am 10. 03. 2017**

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

1. Wie viele 6-elementige Teilmengen von  $\{1, \dots, 12\}$  gibt es? Wie viele davon haben mit einer fest vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge überhaupt kein Element gemeinsam, wie viele haben genau 1 Element, genau 2, 3, 4, 5 oder alle 6 Elemente gemeinsam (d.h., wie groß ist die Anzahl der „Nuller“, der richtigen „Einser“, „Zweier“, „Dreier“, „Vierer“, „Fünfer“ und „Sechser“ beim Lotto „6 aus 12“)?
2. Man berechne alle kürzesten Wege vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_8$  in dem nachstehend dargestellten bewerteten Graphen.



3. Man löse das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der Rang der Koeffizientenmatrix, und was gibt er an?

**Bitte umblättern!**

4. Elementare Aussagenlogik:

- Erklären Sie die Begriffe Aussage und Prädikat, und illustrieren Sie an Beispielen, wie man Aussagen mittels Junktoren verknüpft bzw. Variable in Prädikaten mittels Quantoren bindet.
- Was ist eine Formel der Aussagenlogik und wann heißt sie gültig, erfüllbar oder unerfüllbar. Geben Sie für alle drei Fälle ein Beispiel an.

5. Wir betrachten einen beliebigen Ring  $(R, +, \cdot)$ . Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

|   |   |   |
|---|---|---|
| Die erste Operation $+$ ist stets   | <input checked="" type="checkbox"/> kommutativ <input checked="" type="checkbox"/> assoziativ   | ✓ |
| Die zweite Operation $\cdot$ ist stets  | <input checked="" type="checkbox"/> kommutativ <input type="checkbox"/> assoziativ  |   |
| $(R, +)$ ist stets eine Gruppe.   | <input checked="" type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein  | ✓ |
| Welche Elemente besitzen Inverse bezüglich der ersten Operation $+$ ?   | <input type="checkbox"/> keines <input checked="" type="checkbox"/> alle<br><input type="checkbox"/> mindestens eines, aber nicht alle  | ✓ |
| In $R$ gilt stets die Kürzungsregel:<br>$a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0 \Rightarrow b = c$ für $a, b, c \in R$ | <input checked="" type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein  |   |
| Jeder Ring $R$ besitzt mindestens einen Nullteiler.   | <input type="checkbox"/> ja <input checked="" type="checkbox"/> nein  | ✓ |
| Jeder unendliche Integritätsring $R$ ist auch ein Körper.   | <input checked="" type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein  |   |
| Gibt es Ringe mit folgender Anzahl von Elementen?   | <input type="checkbox"/> 0 <input checked="" type="checkbox"/> 1 <input checked="" type="checkbox"/> 2 <input checked="" type="checkbox"/> 2017 <input type="checkbox"/> $\infty$ |   |

Zeit: 100 Minuten

$$1.) \quad n=12 \quad k=6$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!}$$
$$= \frac{665280}{6!} = \underline{\underline{924}}$$

$$\text{6er: } \binom{6}{6} \cdot \binom{6}{0} = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$  6 aus den 6 Richtigen, 0 aus den 6 falschen

$$\text{5er: } \binom{6}{5} \cdot \binom{6}{1} = 6 \cdot 6 = 36$$

$$\text{4er: } \binom{6}{4} \cdot \binom{6}{2} = 15 \cdot 15 = \underline{\underline{225}}$$

$$\text{3er: } \binom{6}{3} \cdot \binom{6}{3} = 20 \cdot 20 = 400$$

$$\text{2er: } \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{4} = 15 \cdot 15 = \underline{\underline{225}}$$

$$\text{1er: } \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{5} = 6 \cdot 6 = \underline{\underline{36}}$$

$$\text{0er: } \binom{6}{0} \cdot \binom{6}{6} = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

| 2.) | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$    | $P_5$    | $P_6$    | $P_7$    | $P_8$    | Auswahl | Vorgänger  |
|-----|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|------------|
|     | 0     | 1     | 2     | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $P_1$   | $\swarrow$ |
|     | 1     | 2     | 4     | 4        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |          | $P_2$   | $P_1$      |
|     |       | 2     | 3     | 4        | 4        | $\infty$ | $\infty$ |          | $P_3$   | $P_1$      |
|     |       |       | 3     | 4        | 4        | 6        | $\infty$ |          | $P_4$   | $P_3$      |
|     |       |       |       | 4        | 4        | 6        | $\infty$ |          | $P_3$   | $P_2$      |
|     |       |       |       |          | 4        | 6        | 8        |          | $P_6$   | $P_3$      |
|     |       |       |       |          |          | 6        | 7        |          | $P_7$   | $P_6, P_4$ |
|     |       |       |       |          |          |          | 7        |          | $P_8$   | $P_7$      |

$\Rightarrow$  zwei kürzeste Wege:

$P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_6 \rightarrow P_7 \rightarrow P_8$

$P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_7 \rightarrow P_8$

beide Länge 7

$$\begin{aligned}
 3.1 \quad & \text{I: } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\
 & \text{II: } 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\
 & \text{III: } x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
 & \text{IV: } 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\
 & \text{V: } x_1 - x_2 + 2x_3 = 1
 \end{aligned}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |    |        |
|-------|-------|-------|----|--------|
| 1     | 2     | 3     | 8  |        |
| 3     | 2     | 1     | 8  | (-3·I) |
| 1     | 1     | 1     | 4  | (-I)   |
| 2     | 4     | 1     | 11 | (-2·I) |
| 1     | -1    | 2     | 1  | (-I)   |

⇒ Gauß-Algorithmus

| 1 | 2  | 3  | 8   |
|---|----|----|-----|
| 0 | -4 | -8 | -16 |
| 0 | -1 | -2 | -4  |
| 0 | 0  | -5 | -5  |
| 0 | -3 | -1 | -7  |

$-3 \cdot \text{III} : 005 | 5$   
 $+ \text{IV} : 000 | 0$

| 1 | 2  | 3  | 8   |
|---|----|----|-----|
| 0 | -4 | -8 | -16 |
| 0 | -1 | -2 | -4  |
| 0 | 0  | -5 | -5  |
| 0 | 0  | 0  | 0   |

| 1 | 2  | 3  | 8  |
|---|----|----|----|
| 0 | -1 | -2 | -4 |
| 0 | 0  | -5 | -5 |
| 0 | 0  | 0  | 0  |
| 0 | 0  | 0  | 0  |

$x_3 = 1$   
 $-x_2 - 2 = -4$   
 $x_2 = 2$

$x_1 + 4 + 3 = 8$   
 $x_1 = 1$

⇒ Rank 3