8.10.14

ANALYSIS I

1. Folgen, Reihen und Funktionen

A Folgen reeller Zahlen

① Definition u. Grenzwert

Bsp.: Dezimalentwicklung von π

$a_0 = 3$
$a_1 = 3{,}1$
$a_2 = 3{,}14$
$a_3 = 3{,}141$
$a_4 = 3{,}1415$ u.s.w.

Def.: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Anordnung $(a_n)_{n \geq 0} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen, d.i. eine Funktion $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n) = a_n$.

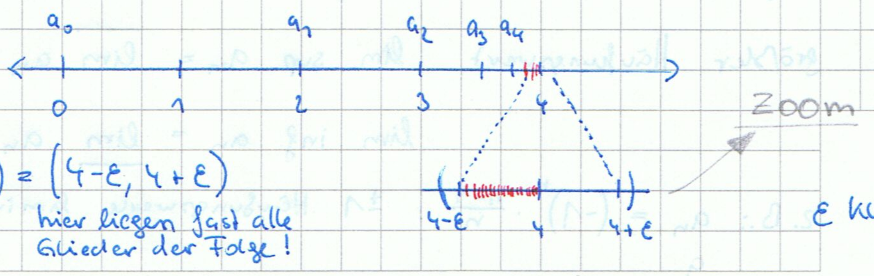
Bsple:

- $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ $\quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$
- $a_n = 2$ $\quad 2, 2, 2, \ldots$ konstante Folge
- $a_n = a_0 + n \cdot d$ $\quad$ z.B.: $2, 5, 8, \ldots$ $(a_0 = 2, d = 3)$ arithm. Folge
- $a_n = a_0 \cdot q^n$ $\quad$ z.B.: $2, 6, 18, \ldots$ geom. Folge
- $a_0 = 5$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ rekursiv def. Folge

  $\Rightarrow 5, 3, \frac{7}{3} \sim 2{,}\dot{3}, \ldots \longrightarrow \approx 2{,}2$ das ist $\sqrt{5}$

Betrachten rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{2}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow a_0 = 0, \; a_1 = 2, \; a_2 = 3, \; a_3 = 3{,}5, \; a_4 = 3{,}75, \ldots$



$U_\varepsilon(4) = (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$

hier liegen fast alle Glieder der Folge!

ε-Umgebung

ε klein (z.B. $\varepsilon = 0{,}01$)

Def.: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen.

d.h. falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|a_n - a\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N(\varepsilon).$$

besitzt die Folge (a_n) keinen Grenzwert, heißt sie divergent.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$

Bspl:

○ $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, denn $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

Nullfolge

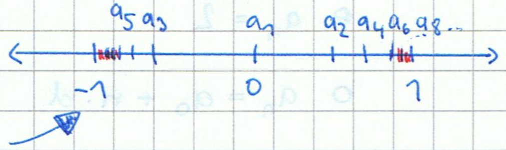
für alle $n > \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor = N(\varepsilon)$

○ $a_n = n^2$, $n \geq 0$: $0, 1, 4, 9, \ldots$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

„uneigentlich konvergent" gegen $+\infty$ (gegen jede größte vorgegebene Zahl)

d.h. $\forall K > 0 \ \exists N(K) \in \mathbb{N} : a_n > K$ für alle $n > N(K)$

○ $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, $n \geq 1$



in $U_\varepsilon(-1)$ und $U_\varepsilon(+1)$ liegen ∞ viele Glieder d. Folge

± 1 sind Häufungswerte

Def.: Eine Folge (a_n) besitzt einen Häufungswert a, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen.

Bem.:

- Grenzwert = einziger Häufungswert, eindeutig bestimmt
- Folge kann mehrere Häufungswerte besitzen.

größter Häufungswert $\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n$ limes superior

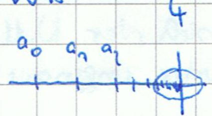
$\liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n$ lim inferior

z.B.: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$: ± 1 Häufungswerte $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

z.B.: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$: $\lim a_n = \lim\inf a_n = \lim\sup a_n = 0$

$(a_n) = 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5 \dots$: $\lim\inf a_n = 0$
$\lim\sup a_n = \infty$ (uneig. HW)

WH 15. 10. 14



$U_\varepsilon(4) = (4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \xrightarrow{\text{fast alle}}$ Grenzwert

$\xrightarrow{\infty}$ Häufungswert

2 Monotonie u. Beschränktheit

Def.: Eine Folge (a_n) heißt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{monoton fallend, wenn} & a_{n+1} \leq a_n \\ \text{streng monoton fallend, wenn} & a_{n+1} < a_n \\ \text{mon. wachsend} & \geq \\ \text{streng mon. wachsend} & > \end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}$$

Def.: Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn es Zahlen a, b gibt, sodass $\underset{\text{untere Schranke}}{a} \leq a_n \leq \underset{\text{obere Schranke}}{b}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bem.:
- obere / untere Schranke nicht eindeutig
- jede Beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt stets eine kleinste obere Schranke = Supremum und eine größte untere Schranke = Infinum (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)

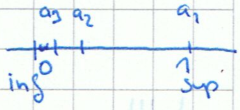
$$\alpha = \inf a_n \text{, falls } \begin{cases} \alpha \leq a_n \ \forall n \\ \alpha' \leq a_n \ \forall n \Rightarrow \alpha' \leq \alpha \end{cases}$$

analog für β

Bsp.: $a_n = \frac{1}{n^2}$: streng mon. fallend, denn $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = a_n$

$\Leftrightarrow (n+1)^2 > n^2 \quad \forall n$ ✓

beschränkt, denn $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$



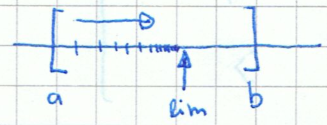
sup. $\frac{1}{n^2} = 1$, inf $\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{nähert sich der Null an, 0,0001 wäre ungenau}} = 0$

konvergent, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Satz: (i) Jede konvergente Folge ist beschränkt (oben und unten)

(ii) Jede beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungswert. (Satz von Bolzano-Weierstraß)

(iii) Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. (Hauptsatz über monotone Folgen)



3 Rechnen mit Grenzwerten

Limes-Sätze: Für Summen, Differenzen, Produkte u. Quotienten konvergenter Folgen gilt:

$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b \Rightarrow \lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$, $b_n \neq 0$

Sandwich-Theorem: Für Folgen (a_n, b_n, c_n) gilt:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für (fast) alle } n \\ \lim a_n = \lim b_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = a$$

Bsple:

○ $a_n = \frac{n^2+n-1}{3n^2+13}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{13}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3+0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} = \lim a_n$

○ $a_n = q^n$, $n \geq 0$: $1, q, q^2, \dots$ geom. Folge

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \infty & q > 1 \end{cases}$$

Beweis für $q > 1$: $q = 1 + p$ mit $p > 0$

$$q^n = (1+p)^n = 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} p + \underbrace{\binom{n}{2} 1^{n-2} p^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 p^n}_{\text{kann man weglassen}}$$

$$\geq 1 + n \cdot p \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \lim q^n = \infty$$

○ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$: $2, 2.25, 2.37, 2.44, 2.49, \to e \approx 2.7$ (ohne Beweis)

○ $a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ (siehe Übung)

○ (a_n) Folge mit $\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha$ für ein $\alpha > 0$ $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

Beweis: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{n^\alpha}$ $\Longrightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (Sandwich)

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} = 1 \qquad\qquad 1$$

Satz (Konvergenzkriterium von Cauchy): Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > N(\varepsilon).$$

B Unendliche Reihen

z.B.: $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 0{,}111 = 0{,}\dot{1} = \frac{1}{9}$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$ Leibnitz-Reihe

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots = \ln 2$

ABER: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

1 Der Begriff der unendlichen Reihe

Sei $a_0, a_1, a_2, \dots$ eine Folge

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zugehörige Reihe

betrachten Folge der Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &\downarrow \\ s &\text{ für } n \to \infty \, ? \end{aligned}$$

Def.: Eine unendliche Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt konvergent, und besitzt den Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert und $\lim s_n = s$ gilt. Andernfalls ist die Reihe divergent.

Bsp

Bsp. unendliche geom. Reihe $\sum_{n\geq0} q^n = 1+q+q^2+\dots$

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1+q+q^2+\dots+q^n \\ qs_n &= \phantom{1+{}}q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} \end{aligned}\right\} -$$

$$s_n(1-q) = 1-q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q|<1$$

Also: $\sum_{n\geq0} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

z.B.: $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots = \frac{1}{10}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\dots}_{\frac{1}{1-\frac{1}{10}}}\Big) = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{9}$ ✓

Satz: Ist $\sum_{n\geq0} a_n$ konvergent, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, aber nicht umgekehrt.

Bew: (i) Sei $\sum_{n\geq0} a_n$ konvergent, d.h. $\lim s_n = s$

$$s_n = s_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = \underset{\overset{\downarrow}{s}}{s_n} - \underset{\overset{\downarrow}{s}}{s_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{q.e.d.}$$

(ii) betrachte $\sum_{n\geq0} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

allg. $s_{2^n} > 1+\frac{n}{2} \to \infty \Rightarrow \sum_{n\geq0}\frac{1}{n}$ ist divergent!

22. 10. $\overline{14}$

WH: $$\sum_{n\geq 0} a_n = \underbrace{\underbrace{a_0}_{s_1} + a_1}_{s_2 \dashrightarrow s} + a_2 + \dots = s \Rightarrow a_n \to 0$$

Testfrage: $\sum a_n < \infty \Rightarrow$
☒ (a_n) konst
☒ (s_n) konv.
☒ $a_n \to 0$

Def.: Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt absolut konvergent, falls die Summe $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ konvergent ist. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, nennt man bedingt konvergent.

Satz: Eine absolut konv. Reihe ist konvergent, aber nicht umgekehrt.

Also: $\sum a_n$ abs. konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\lim a_n = 0$

Bsple: ○ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$ ist abs konv. und daher auch konvergent.

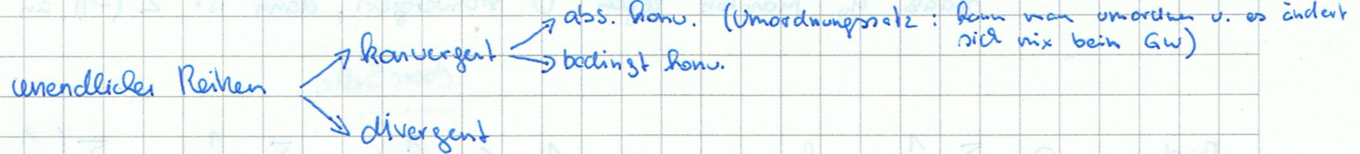
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \dots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{10})} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

○ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konv., aber nicht abs. konv.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$ div. (uneigentlich konvergent gegen ∞)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$ (siehe später)



2 Konvergenzkriterien

Satz: (i) Majorantenkriterium: Sind $\sum a_n, \sum b_n$ zwei Reihen, sodass $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle n und $\sum b_n$ konv., dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Minorantenkriterium: Sind $\sum a_n, \sum b_n$ zwei Reihen, sodass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n und $\sum a_n$ divergent, dann ist auch $\sum b_n$ divergent.

(iii) Wurzelkriterium: Gilt für $\sum a_n$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Falls hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum a_n$ divergent.

Limesform: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.

(iv) Quotientenkriterium: Gilt für $\sum a_n$ (mit $a_n \neq 0$), dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum a_n$ abs konv. Falls jedoch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so ist $\sum a_n$ divergent.

Limesform: $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.

(v) Leibnizkriterium: Ist $\sum (-1)^n a_n$ eine alternierende Reihe, sodass a_n monoton gegen 0 konvergiert, dann ist $\sum (-1)^n a_n$ konvergent.

Bsple: o $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergent, denn $\frac{1}{n^2} \leq \overbrace{\frac{1}{n \cdot (n-1)}}^{\text{obere Schr.}}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$

$= 1 \cancel{- \frac{1}{2}} \cancel{+ \frac{1}{2}} \cancel{- \frac{1}{3}} \cancel{+ \frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \ldots = 1$

konv. Majorante $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konv. $\left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$

○ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div, denn $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ div.

div. Minorante $\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div.

○ $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ konv., denn $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$ ✓

, denn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$ ✓

○ $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ $\quad |a_n| = \frac{1}{2n+1} \downarrow 0 \Rightarrow$ konv. nach Leibnitz $\left(= \frac{\pi}{4}\right)$

○ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots$ konv. nach Leibnitz $(= \ln 2)$

Rechnen mit Reihen:

$\sum a_n = a$, $\sum b_n = b \Rightarrow \sum (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\sum (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

$\sum a_n \cdot \sum b_n = ? \longrightarrow \sum c_n$ mit $c_0 = a_0 b_0$

$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = ?$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$ (Summe der Indizes 2)

$\vdots$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$: Cauchy-Produkt.

$\sum a_n = a$, $\sum b_n = b \Rightarrow \sum c_n = a \cdot b$

3 Potenzreihen

Bsp.: $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ Exponentialreihe

Quotkrit: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x| \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ und jedes festes $x \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ abs konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

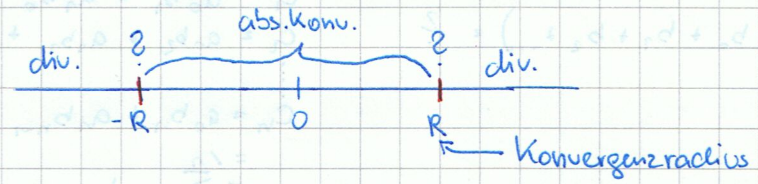
insb. $x = 1$: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$

allg. Potenzreihe: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ oder $\sum \underset{\text{Koeffizienten}}{a_n} (x - \underset{\text{Entwicklungspunkt}}{x_0})^n$

z.B.: $\sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ Exp. Reihe

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| < 1 \\ \text{divergent sonst} \end{cases}$$ geom. Reihe

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe (mit $x_0 = 0$)



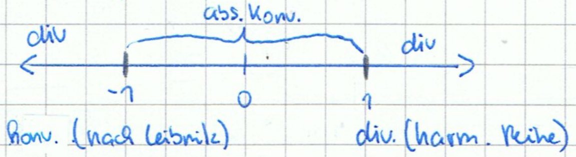
Satz: Zu jeder Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es eine Zahl R mit $0 \leq R \leq \infty$, sodass die Reihe für alle $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent ist. Dabei gilt: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Bem.: $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$ "konvergiert immer", d.h. $\sum$ konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$= \infty \Rightarrow R = 0$, "konvergiert nur für 0", d.h. $\sum$ konv. nur für $x = 0$

Bsp.: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \longrightarrow |x| < 1$ für $|x| < 1$ d.h. abs. konv.

ODER: $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$



C Asymptotischer Vergleich von Folgen

Def. (Landau-Symbole): Seien (a_n), (b_n) Folgen. Dann schreibt man:

(i) $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ (für $n \to \infty$), wenn $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq c$ für $c > 0$
"groß O"
(an wächst nicht wesentlich schneller als b_n)

(ii) $a_n = o(b_n)$, wenn $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ (an wächst langsamer als b_n)
"klein o"
↳ Null

(iii) $a_n \sim b_n$, wenn $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. (a_n wächst genau so schnell als b_n)
"asymptotisch gleich"

Bsp.: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$

$= o(n^3)$

$\sim \frac{n^2}{2}$

Quicksort $= \mathcal{O}(n \log n)$

29.10.14

D Elementare Funktionen

betrachten Funktionen $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}$

„Darstellung: Graph d. Fkt."

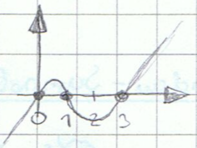
1 Beispiele u. einfache Eigenschaften

Polynomfunktionen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$\in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

Polynom vom Grad n

z.B.: konst. Funktionen $f(x) = a_0$
lineare Fkt. $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$
$= k \cdot x + d$
Potenzfkt. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
Polfkt 3. Grades $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$



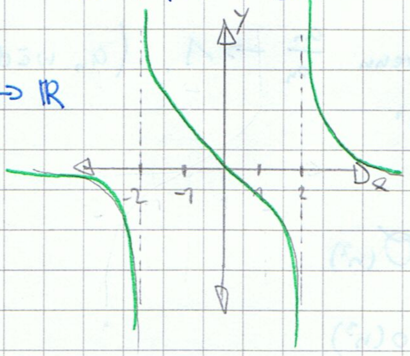
Nullst. 0,1,3

Rationale Funktionen: $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q … Polynome

$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$

z.B. $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$



Def.: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq D$ ein Intervall, dann heißt f auf I streng monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (bzw. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$), $\forall x, y \in I$.

Polynomfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert, stückweise monoton, im Allgemeinen weder injektiv, noch surjektiv.

Satz: Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f: I \to f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher auf I umkehren.

Bew: o.B.d.A. sei f streng monoton wachsend

$$\left.\begin{array}{l} x \neq y,\ \text{ang. } x < y \implies f(x) < f(y),\ \text{also } f(x) \neq f(y) \quad f \text{ injektiv} \\ f: I \to f(I) \text{ automatisch surjektiv} \end{array}\right\} \implies f \text{ bijektiv}$$

q.e.d.

② Exponentialfunktionen und Logarithmen

Def.: Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch

$\exp(x) = e^x$, wo $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$. Die allg. Exp.Fkt. lautet $f(x) = a^x$ für $a > 0$.

Frage: Wie ist a^b (für $a > 0$) überhaupt definiert?

- o ganze Exp. a^n $(n \in \mathbb{Z})$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

  $a^0 = 1$

  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

- o rationale Exp. $a^{\frac{p}{q}}$ $(p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0)$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $\quad$ ($\sqrt[q]{\ }$ ist stets eindeutig definiert)

- o reelle Exp. a^b $(b \in \mathbb{R})$: wähle Folge in $\mathbb{Q}$: $\underset{\in \mathbb{Q}}{(b_n)} \to \underset{\in \mathbb{R}}{b}$ und

  setze $a^b = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$ (lim existiert und ist unabhängig von (b_n))

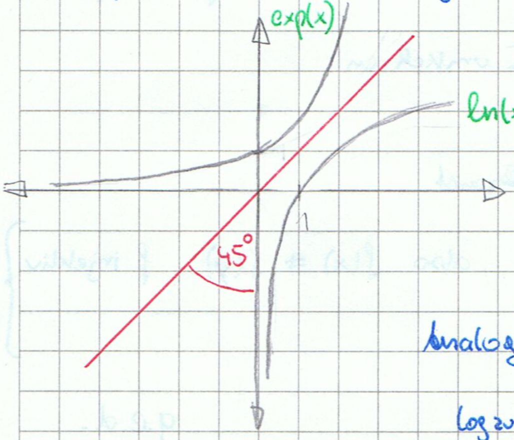
$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^x$

insb. $e^0 = 1$, $e^1 = e = 2{,}7\ldots$

Es gilt: Die Expfkt. $\exp(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ bijektiv ab. (o.Bew.)

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv $\Longrightarrow$ ex. Umkehrfkt. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

natürlicher Logarithmus



wo $y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^y$

insbes. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

Analog ist $\log_a(x)$ als Umkehrfkt. von a^x definiert, d.h.

log zur Basis a

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y$$

Rechenregeln f. Potenzen und Logarithmen:

z.B.: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log a^b = b \cdot \log a$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} \quad , \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Satz: Die natürliche Exp.Fkt. besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $e^x = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

(ii) $e^x = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ e^x als Potenzreihe

(iii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ Funktionalgleichung

③ Winkelfunktionen u. Arcusfunktionen

Sinus, Cosinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Reihendarstellung:} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &\text{Tangens} \\ &\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{def. für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots \right\} \end{aligned}\right\} \text{im Bogenmaß!!}$$

Erweitern exp, sin, cos auf $\mathbb{C}$ und berechnen:

$$\begin{aligned} e^{i\cdot x} &= 1 + (i\cdot x) + \frac{(i\cdot x)^2}{2!} + \frac{(i\cdot x)^3}{3!} + \frac{(i\cdot x)^4}{4!} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)}_{\cos x} + i\cdot\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)}_{\sin x} \end{aligned}$$

also $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\cdot \sin x}$ Euler'sche Formel

Anwendungen:

○ $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$

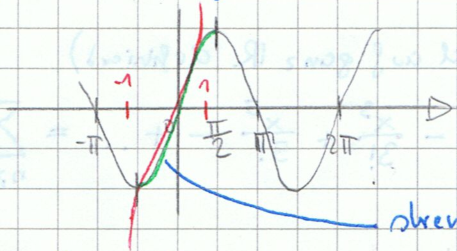
○ $$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\cdot\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\cdot\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{aligned}\right\} \text{Euler'sche Formeln}$$

○ $x = \pi$: $e^{i\cdot\pi} = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1$

$$\Rightarrow e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$$

Umkehrung d. Winkelfunktione:

sin x



streng monoton wachsend, bijektiv

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$\Rightarrow$ Umkehrfkt. $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

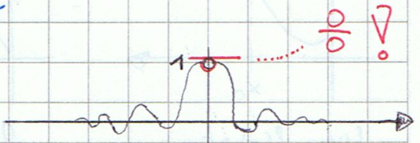
5.11.14

E Grenzwerte von Funktionen u. Stetigkeit

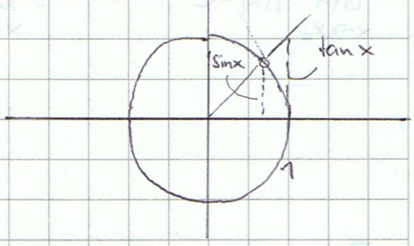
① Definition u. Beispiele

Fkt. $y = f(x)$, x_0 Frage: gegen welchen Wert strebt $f(x)$, wenn sich x an x_0 nähert?

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$$



Bsp.: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$$\sin x \le x \le \tan x$$
$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$
$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$x \to 0: \quad 1 \Rightarrow 1$$

also $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

betrachten Folge $x_1, x_2, \ldots \to 0$

zugehörige Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots \to 1 = \lim_{x \to 0} f(x)$

Def.: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ folgt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Schreibweise: $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$

Gleichwertig zu obiger Definition ist folgende Bedingung:

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass gilt

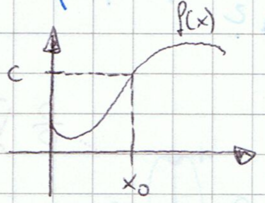
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in D, x \neq x_0$$

"Delta" – "nahe genug bei ..."

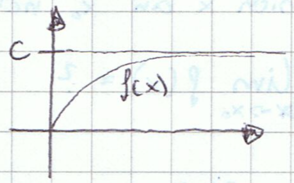
Ladezeit beim Kondensator — Druck z.B. bei Gasgleichung

Analog sind definiert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

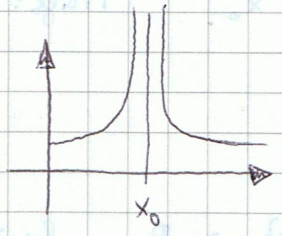
Bsple.:



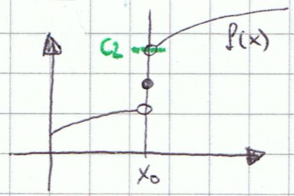
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$



$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to x^+} f(x) = c_2$ „einseitiger Limes"

Praktische Berechnung von $\lim f(x)$:

1. gemäß Definition d. Grenzwerts
2. Anwendung v. Rechenregeln für Grenzwerte v. Summen u. Produkten von Funktionen (Entsprechend den Regeln für Folgen)
3. Umformung des Ausdrucks für $f(x)$
4. Entwicklung von $f(x)$ in eine Reihe. (siehe später)
5. Regel von de l'Hospital (siehe später)

Bsple:

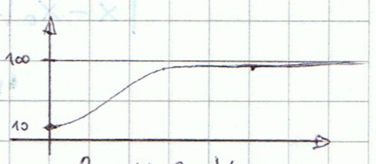
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(3x+1)}{\lim\limits_{x \to 1}(x+1)} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{1+0} = \underline{\underline{3}}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right) = \underline{\underline{1}}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{100}{1+9 \cdot e^{-x}} = \frac{100}{\lim\limits_{x \to \infty}(1+9 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0})} = 100$



logistische Kurve

Def.: (Stetigkeit) Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion heißt stetig in D, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

Äquivalente Formulierungen:

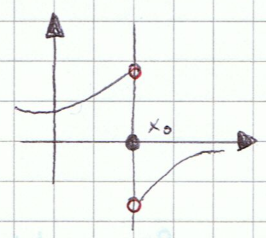
- ○ f ist stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$ [Folgenstetigkeit]

- ○ f ist stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$

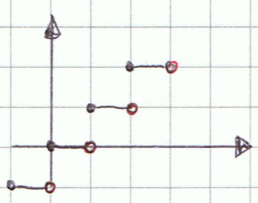
[Umgebungsstetigkeit]

Es gilt: Alle elementaren Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

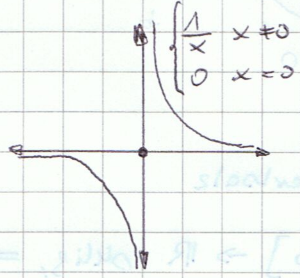
Bsple für nicht stetige Funktionen:



Sprungstelle x_0

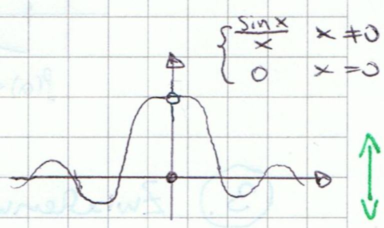


∞ viele Sprungstellen



$\begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

unstetig in $x_0 = 0$

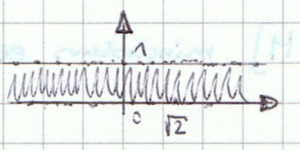


$\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

unstetig in $x_0 = 0$

⟷ Kann man durch verschieben ändern sodass stetig !!

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

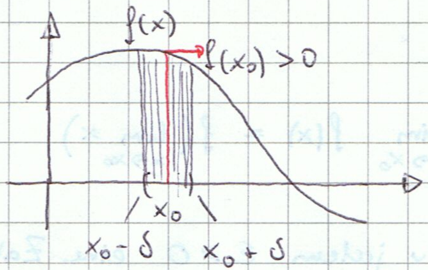


unstetig $\forall x \in \mathbb{R}$
„Springt immer hin und her“

2 Eigenschaften stetiger Funktionen

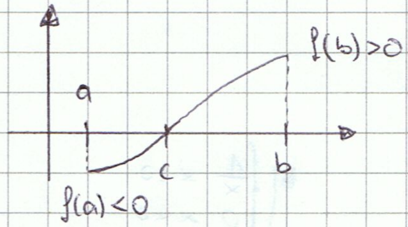
① Vorzeichenbeständigkeit:

f stetig, $f(x_0) > 0 \Longrightarrow \exists$ Umgebung $U_\delta(x_0): f(x) > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$



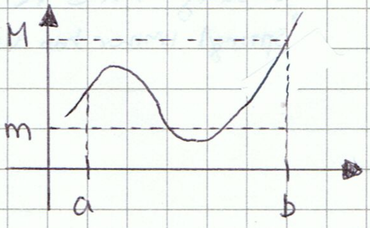
② Nullstellensatz (Bolzano)

$f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0 \Longrightarrow f$ besitzt mindestens eine Nullstelle $c \in I$ mit $f(c) = 0$



③ Zwischenwertsatz

$f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\Longrightarrow f$ nimmt auf I einen kleinsten Wert $m = \min \{f(x) \mid x \in I\}$, einen größten Wert $M = \max \{f(x) \mid x \in I\}$ und alle Werte in $[m, M]$ mindestens einmal an.



F Auflösen von Gleichungen

ist nicht lösbar !!

Gleichung $f(x)=0$ z.B. $f(x) = e^x - 100x = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(x) = x - f(x) = x$$

x Nullstelle von $f(x) \Longleftrightarrow x$ Fixpunkt von $\varphi(x)$, also $\varphi(x) = x$

Zum Auffinden von Fixpunkten :

Iterationsverfahren :

$$x_0,\ x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \dots,\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \dots \xrightarrow{n \to \infty} x^*$$

Startwert Fixpunkt $\varphi(x^*) = x^*$

① Newtonsches Näherungsverfahren:

$f(x) = 0$

$\Longleftrightarrow \varphi(x) = x - f(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} = x$ (Näheres zu $f'(x)$ siehe Kap. 2)

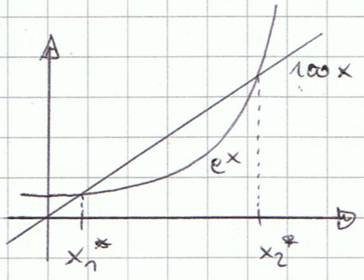
$\Longleftrightarrow$ Iterationsverfahren: $\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Bsp.: $f(x) = e^x - 100x \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 100x_n}{e^{x_n} - 100}$

$f'(x) = e^x - 100$

z.B.: $x_0 < 0,\ x_1 = 0{,}01,\ x_2 = 0{,}01 \dots \longrightarrow x_1^* = 0{,}01$

$x_0 = 10,\ x_1 = 9{,}04,\ x_2 = 8{,}14 \dots \longrightarrow x_2^* = 6{,}47$



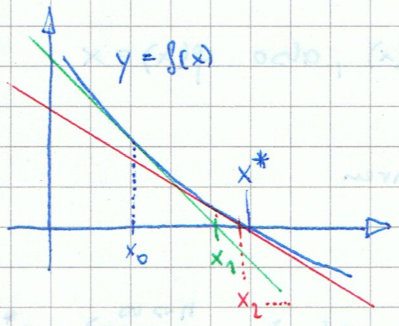
12.11.14

Nullstellenproblem $f(x) = 0$

$\Updownarrow$

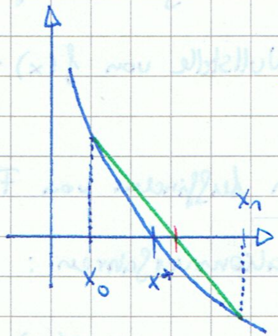
Fixpunktproblem $\varphi(x) = x$

↳ Iterationsverfahren: $\underbrace{x_0}_{\text{Startwert}}, \underbrace{x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots}_{\text{laufende Verbesserungen}} \rightarrow$ Fixpkt. x^*



Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Regularfalsie

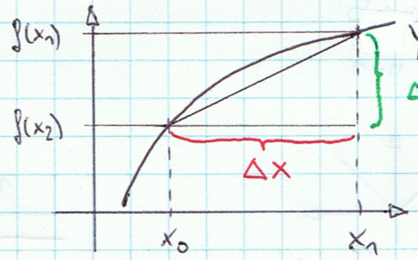
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

2 DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG IN EINER VARIABLEN

(A) Die ABLEITUNG

(1) Definition und Ableitung einfacher Funktionen

betrachten Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Anstieg der Sekante
- mittlere Änderung d. Fkt. f im Intervall $[x_0, x_1]$
- Differenzenquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} := f'(x_0)$$

Anstieg der Tangente
momentane Änderung an der Stelle x_0
Differentialquotient.

Def.: Unter der Ableitung (Differentialquot.) unter der Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ versteht man den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f in x_0 differenzierbar; Existiert er für alle $x_0 \in D$, heißt f in D differenzierbar und die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$.

Schreibweise: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$ — "dy nach dx"

Interpretation in: der Geometrie: Tangentenanstieg.
den Naturwissenschaften: die Momentane Änderung einer Größe (z.B. Geschwindigkeit)
der Wirtschaft: z.B. Grenzkosten

Bsple.: ○ $f(x) = c$ konstant

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{c-c}^{0}}{x-x_0} = \underline{\underline{0}} \quad \forall x_0$$

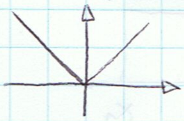
○ $f(x) = 3x^2+1$

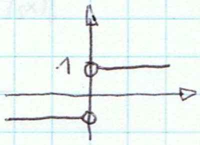
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{3x^2+1-(3x_0^2+1)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3\cdot\overbrace{(x^2-x_0^2)}^{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}}{\cancel{x-x_0}} = \lim_{x \to x_0} 3\cdot(x+x_0) = \underline{\underline{6x_0}}$$

allg.: $f(x) = ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x) = 2ax+b$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

○ $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$





$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\text{für } x_0=0}{=} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ existiert nicht!}$$

also ist $|x|$ für $x=0$ nicht differenzierbar!

② Eigenschaften u. Ableitungsregeln

$$f \text{ stetig } \underset{\overset{?}{\Longleftarrow}}{\not\Longrightarrow} f \text{ differenzierbar}$$

Satz: Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f dort auch stetig.

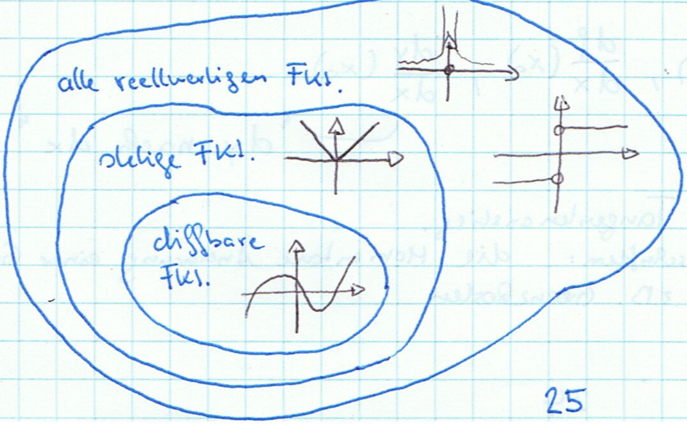
Bew.:

$$f(x) = \cancel{f(x_0)} + \frac{f(x)\cancel{-f(x_0)}}{\cancel{x-x_0}} \cdot \cancel{(x-x_0)}$$

$$\downarrow x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0$$

also $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. f ist stetig in x_0 q.e.d.



Ableitung elementarer Funktionen (Schule)

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R},\ n \geq 0$ oder $x > 0$ und $n \in \mathbb{R})$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ (Beweis mit Summensatz)
- $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

u.s.w.

Satz (Ableitungsregeln):

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Produktregel
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Quotientenregeln
- $D_1 \xrightarrow{g} D_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

  $f \circ g = F$, d.h. $F(x) = (f \circ g) \cdot (x) = f(g(x))$

  $\Rightarrow F'(x) = \underset{\text{äußere Ableitung}}{f'(g(x))} \cdot \underset{\text{innere Ableitung}}{g'(x)}$ Kettenregel

  kurz: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ Leibnitz Schreibweise

- $$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "f"] & f(D) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

  $y = f(x)$ ist invertierbar (z.B. streng monoton)

  $\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, wo $x = f^{-1}(y)$

  Kurz: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Beweis der Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underset{\swarrow}{\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)} + \underset{\downarrow}{f(x_0)} \cdot \underset{\downarrow}{\lim} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$ q.e.d.

Bsple:

- $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$
- $f(x) = (1+x^2) \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + (1+x^2) \cdot e^x = e^x \cdot (1+2x+x^2)$
- $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$
- $f(x) = \underset{f(g)}{\sqrt{\underbrace{1+x^2}_{g(x)}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \underset{f_1}{\sin} \underset{f_2}{\sqrt{\underbrace{1+x^2}_{f_3}}} = f_1(f_2(f_3(x))) \Rightarrow f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$

$$= \cos\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

19.11.14

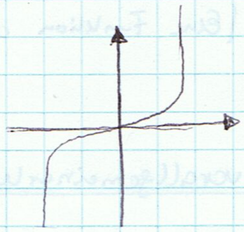
$y = f(x)$: $y' = f'(x)$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x) \right]'$$

Bsp.: $f(x) = \ln x$, $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$$
$$f''''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = \frac{(n-1)!}{x^n} \cdot (-1)^{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot |x|$

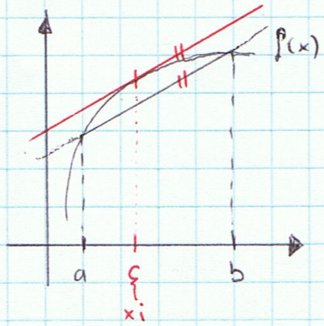
$f''(x)$ ex. nicht für $x = 0$!

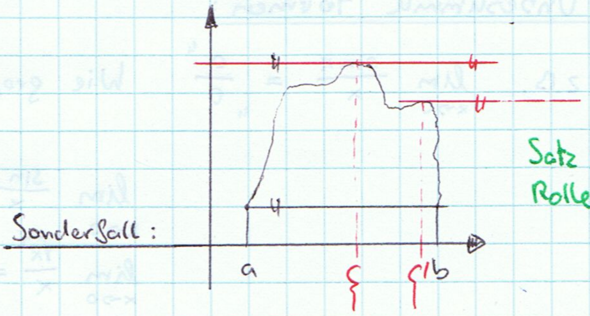
B Die Taylor'sche Formel u. d. Mittelwertsatz

① Der Mittelwertsatz

Satz: (MWS der Differentialrechn.) Ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar, dann gibt es mindestens eine Stelle $\overset{\text{xi}}{\xi}$ mit $a < \xi < b$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$





Bew.: o.B.d.A. sei f nicht linear (sonst trivial)

bilden $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

$\Rightarrow F$ stetig, $F(a) = F(b) = 0$, $F \neq 0$

$\Rightarrow F$ besitzt ein Minimum oder Maximum in einem Punkt $\overset{\text{xi}}{\xi}$ mit $a < \overset{\text{xi}}{\xi} < b$

$\Rightarrow F'(\overset{\text{xi}}{\xi}) = f'(\overset{\text{xi}}{\xi}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ Schule, im Abschnitt ④

$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ q.e.d.

Satz: Seien f, g diffbare Funktionen auf $[a,b] = I$ und $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$, dann gilt $f(x) = g(x) + C$ mit C konstant (Verschieben des Graphen)

Bew.: setzen $F(x) = f(x) - g(x)$, $x_0 \in I$ beliebig

$$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = \underbrace{F'(\xi)}_{0} \cdot (x - x_0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{C} \quad \forall x$$

(Eine Funktion deren Ableitung 0 wird, ist eine Konstante!)

② Der verallgemeinerte MWS und die Regel von de l'Hospital

Satz: (Verallg. MWS d. Diffrechnung): Sind f, g auf dem Intervall $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diffbar, $g'(x) \neq 0$ $\forall x$, dann gibt es mind eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, sodass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Bew.: Ähnlich wie ① -> im Buch

Unbestimmte Formen:

z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}“$ Wie groß ist „$\frac{0}{0}$“?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}“ = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = „\frac{0}{0}“ = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = „\frac{0}{0}“ = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = „\frac{0}{0}“ = 0$$

Weitere unbestimmte Formen:

$\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Satz: (Regel von de l'Hospital) Sind f, g Funktionen, die in einer Umgebung von x_0 diffbar sind, gilt $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

(Achtung: nicht die Quotregel. Einzelen ableiten.)

Eine analoge Aussage gilt für $x \to \infty$ oder auch, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Bew.:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)\cdot\cancel{(x-x_0)}}{g'(\xi)\cdot\cancel{(x-x_0)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \xi \text{ zw. } x \text{ und } x_0$$

$$x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0 : \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad ✓$$

Bsple:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{+\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{n!\cdot x^0}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

  d.h. e^x wächst schneller als jede Potenz von x.

- $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = \underline{\underline{0}}$

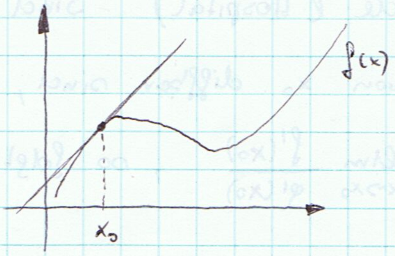
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = „1^{\infty}“ \qquad a^b = e^{b\cdot \ln a}$

  $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = \underline{\underline{e}}$

③ Taylorreihen

geg. Fkt $f(x)$, x_0 fester Pkt.



Näherung von $f(x)$: $y = \overset{d}{\overbrace{\underset{a_0}{f(x_0)} + \underset{a_1}{f'(x_0)} \cdot (x-x_0)}}^{\text{Tangentengl.}}$ $\quad (d + k \cdot x)$

bessere Näherung:

$$f(x) \approx \underbrace{a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + a_3 \cdot (x-x_0)^3 + \dots}$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$$

Potenzreihe in x um Pkt x_0

Angenommen $f(x)$ ist durch eine Potenzreihe darstellbar, d.h.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$$

$\Rightarrow$ $f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \dots$: $f(x_0) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$: $f'(x_0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots$: $f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$

$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

Taylorreihe im Entwicklungspkt x_0

Sonderfall: $x_0 = 0$: $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Bsp.:

- $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

  $f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \Rightarrow e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot x^n$

  Exponentialreihe

- $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} \Big|_{x=1} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

  $\Rightarrow \ln x = \ln 1 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - + \dots$

  $x \mapsto x+1$: $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$

  $x=1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

26.11.14

$f(x)$, x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Restglied gibt Fehler an.
(x_0 ist kein Abbruchfehler; abhängig von n, x)

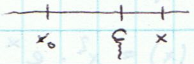
Taylor'sche Formel mit Restglied.

Satz: (Satz v. Taylor) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal diffbar, $x, x_0 \in I$, dann gilt die Taylor'sche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + R_n$$

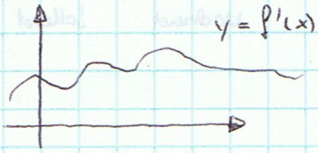
mit dem Restglied $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, wo ξ zwischen x_0 und x liegt. Ist f beliebig oft diffbar, so stimmt die Taylorreihe genau dann mit f überein, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Schlimmster Fall meist beim x. Keiner bei x_0

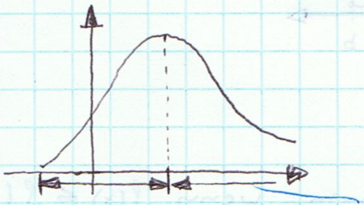


④ Monotonie, Extremwerte und Konvexität.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar (nach Bedarf)



(a) Monotonie



f mon. wachsend
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f mon. fallend: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Satz: f ist genau dann mon. wachsend (fallend) auf I, wenn $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in I$

Bew.: $\boxed{\Rightarrow}$ sei f mon. wachsend, d.h. $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

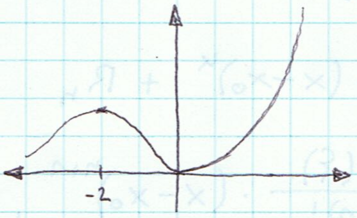
$\boxed{\Leftarrow}$ gelte $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

$$x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\substack{\geq 0 \\ (\text{da } f'(x) \geq 0)}} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \checkmark$$

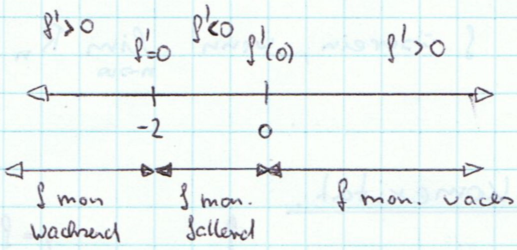
Bsp.:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$



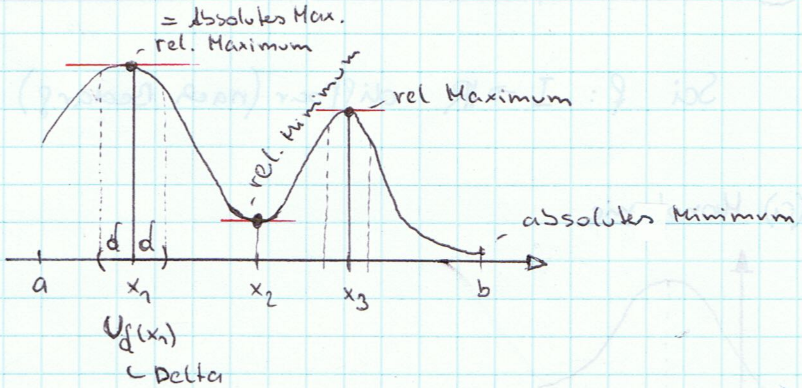
(www.desmos.com)

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot (2 + x) \cdot e^x$$



(b) Extremwerte

$f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$



Def.: f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 gilt; f besitzt in x_0 ein absolutes Max. auf I, wenn $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$ gilt.

Analog sind rel. u. abs. Minima definiert.

Satz: Für relative Extrema von f gilt:

(i) notwendige Bedingung: f hat rel. Extremum in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

(ii) hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0 \begin{cases} < 0 \Rightarrow f \text{ rel Max in } x_0 \\ > 0 \Rightarrow f \text{ rel Min in } x_0 \end{cases}$

Bew. von (ii): gelte $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$

$\Leftrightarrow f'' < 0$ in einer Umgebung von x_0)

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{0} + \underbrace{\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{<0}\cdot\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ d.h. rel. Max. von f an der Stelle x_0.

Bsp.: (Fortsetzung): $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = x\cdot(2+x)\cdot e^x = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 0$

$f''(x) = \ldots = (2+4x+x^2)\cdot e^x$ $\quad f''(-2) = -2\cdot e^{-2} < 0$ (rel. Max)

$f''(0) = 2 > 0$ (rel. Min.)

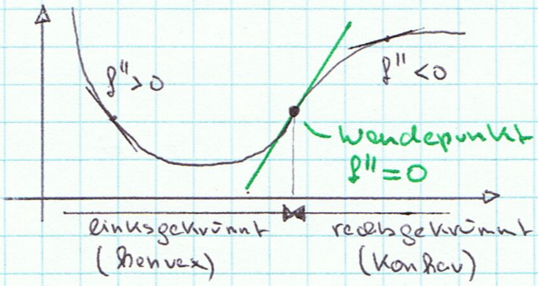
abs. Extrema auf $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^2 \cdot e^x \geq 0$, $f(0) = 0 \Rightarrow$ abs Min. bei $x = 0$

$f(-2) = \frac{4}{e^2} > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (Fkt. wird beliebig groß, wenn man nur weit genug nach rechts geht.)

$\Rightarrow \nexists$ abs. Max.

(c) Wendepunkte u. Konvexität



Def.: f heißt konvex (konkav), wenn f' monoton wachsend (fallend) ist.

f besitzt an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn f' in x_0 ein relatives Extremum hat.

Satz: f ist genau dann konvex (konkav) auf I, wenn $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$. Gilt $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0) \neq 0$, dann besitzt f einen Wendepunkt an der Stelle x_0.

Bsp. (Fortsetzung):

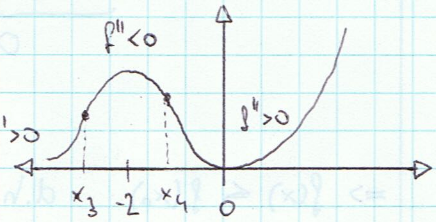
$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

Lösungsformel für Quadrat. Glg.

$$f''(x) = (2+4x+x^2) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$f'''(x) = (6+6x+x^2) \cdot e^x \Rightarrow f'''(x_{3,4}) \neq 0 .$$

also $x_{3,4}$ Wendepunkte.



C DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL

① Integration als Umkehrung der Differentiation

Bsp.: Wie lautet der Weg $s(t)$ zur Zeit t bei einer Bewegung mit Geschwindigkeit $v(t) = a \cdot t$? (z.B. $a = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = a \cdot t \Rightarrow s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} \quad , \text{denn} \quad \frac{d}{dt} \frac{at^2}{2} = a \cdot t$$

$$\frac{a \cdot t^2}{2} + 10$$

$$\frac{a \cdot t^2}{2} + C \quad , \quad C \text{ konst.}$$

Def.: Für eine geg. Fkt. $f : I \to \mathbb{R}$ heisst jede Fkt. $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ eine Stammfunktion oder ein unbestimmtes Integral von f.

Schreibweise: $$F(x) = \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \, \underbrace{dx}_{\text{Integrationsvariable}}$$

Wie sehen alle Stammfunktionen zu f aus?

Satz: Besitzt f die Stammfunktion F, dann sind alle Stammfkt.en von f gegeben durch $G(x) = F(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

(Beweis mittels MWS)

Bsple für Grundintegrale (siehe Schule od. FS.):

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \in \mathbb{N} \; , \text{ auch } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \begin{cases} \ln x + c & x > 0 \\ \ln(-x) + c & x < 0 \end{cases} \qquad$ kurz $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c \quad , \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c , \ldots$

3.12.$\overline{14}$

2 Technik d. Integrierens

Satz: (Integrationsregeln):

(i) $\int (f+g)\, dx = \int f dx \pm \int g dx$, $\int kf\, dx = k \cdot \int f\, dx$ Linearität

(ii) $\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx$ partielle Integration

(iii) $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$ mit $u = g(x)$ Substitutionsregel

i.d. Praxis $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$, $du = g'(x)\, dx$

Bsple:

○ $\int \frac{x^4-1}{x}\, dx = \int \left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4}{4} - \ln|x| + C$

○ $\int \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\cos x}\, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$

○ $\int \ln x\, dx = \int \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g'}{1}\, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx =$

$= \ln x \cdot x - x = x \cdot (\ln x - 1) + C$

○ $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| + C$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$, $du = -\sin x\, dx$

○ $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{\frac{x^2}{4}}_{u^2} + 1} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{2\, du}{u^2+1} = \frac{2}{4} \cdot \arctan u$

$= \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{x}{2} + C$

$(\arctan)' = \frac{1}{x^2+1}$

$u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2}\, dx \Leftrightarrow dx = 2\, du$

③ Partialbruchzerlegung zur Integration rationaler Fktnen.

sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x)$ Polynomfktnen o.B.d.A. grad $p <$ grad q

wobei $q(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\lambda_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} Q_j(x)^{l_j}$

reelle Nullstellen λ_i mit Vielfachheit von k_i

quadrat. Polynome zu je 2 konj. komplex. Nullst. d. Vielfachheit von l_j

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_i} \frac{A_{i\mu}}{(x-\lambda_i)^{\mu}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{l_j} \frac{B_{j\nu} x + C_{j\nu}}{Q_j(x)^{\nu}}$$

Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten A, B, C

Berechnung mittels Koeffizientenvergleich

Bsp.: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)}$ also $\lambda_1 = 1$ mit $k_1 = 2$
$\lambda_2 = -1$ mit $k_2 = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2+1 = A \cdot (x-1) \cdot (x+1) + B \cdot (x+1) + C \cdot (x-1)^2$$

$$\vdots$$

$$x^2+1 = \underbrace{(A+C)}_{1} \cdot x^2 + \underbrace{(B-2C)}_{0} \cdot x + \underbrace{(-A+B+C)}_{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C = 1 \\ B-2C = 0 \\ -A+B+C = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \,;\; B = 1 \,;\; C = \frac{1}{2}$$

also: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$

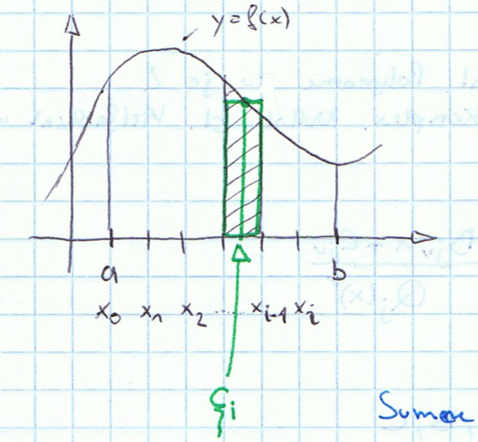
$$\Rightarrow \int \text{——}\;\text{,,}\;\text{——}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1|$$

$$= \ln\sqrt{|x^2-1|} - \frac{1}{x-1} + C$$

D Das bestimmte Integral

① Die Fläche unter einer Kurve

Kurve geg. durch Fkt. $y = f(x)$ mit $a \le x \le b$



Zerlegung von $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

n Teilintervalle d. Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

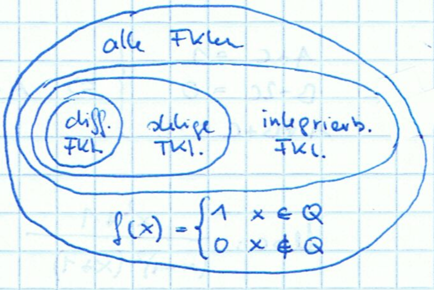
Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \ldots, n$

$$\text{Summe } S_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x}_{\substack{\text{Zwischensumme} \\ \text{Riemann'sche Summe}}} \xrightarrow{n \to \infty} \text{Fläche } \int_a^b f(x)\,dx$$

Def.: Falls jede Folge von Zwischensummen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergiert, so heißt dieser das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ von f auf $[a,b]$.

Wann existiert das bestimmte Integral?

- Jede auf $[a,b]$ deffinierte monotone Fkt. ist integrierbar.
- ——"—— (stückweise) stetige Fkt. ——"—— .



Eigenschaften des bestimmten Integrals

- $\int_a^b (f \pm g)\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx$; $\int_a^b k\cdot f\,dx = k\cdot \int_a^b f\,dx$

- $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$

(c kann auch neg. sein)
(wobei $\int_a^b = -\int_b^a$)

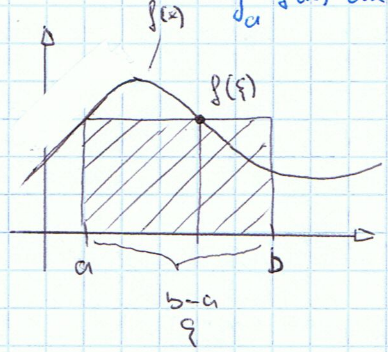
- $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

- $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

② Der Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung

Satz: (MWS d. Integralrechnung) Ist f stetig auf $[a,b]$, dann gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$, sodass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a) .$$



Beweis mittels MWS d. Diffrechnung.

Dem: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ heisst Mittelwert (Integralmittel) der Fkt f auf $[a,b]$

Bsp.: Bewegung mit Momentangeschwindigkeit: $v(t) = 6\cdot t^2 - 4\cdot t$, $0 \leq t \leq 3$

$\Rightarrow$ Durchschnittsgeschw.

$$\bar{v} = \frac{1}{3}\int_0^3 v(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 (6t^2-4t)\,dt = \dots = \underline{12\ m\cdot s^{-1}}$$

Satz: (HS d. Diff.- u. Integralrechnung):

Ist f stetig im Intervall $[a,b]$ und F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bew. idee: betrachten $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

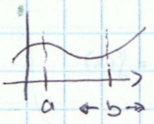
und zeigen, dass F eine Stammfkt. v. f ist, d.h. $F' = f$

dann $$F(b) - F(a) = \underset{+C}{\int_a^b f(t)\,dt} - \int_a \underbrace{{}^{a} f(t)}_{0-C}\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \checkmark$$

10.12.$\overline{14}$

$f(x) \xrightarrow{\int} \int f(x)\,dx = F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$f(x)$, $[a,b] \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ = Fläche

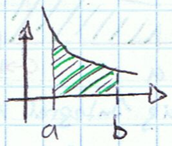


$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Bspl: ○ $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$

$a,b > 0$



○ Harmonische Zahlen

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$

$\ln n \leq \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}_{H_n} \leq 1 + \ln n$

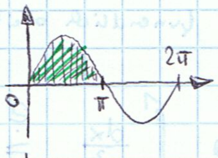
also $\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1$

Bem: $0 \leq \underbrace{H_n - \ln n}_{} \leq 1$

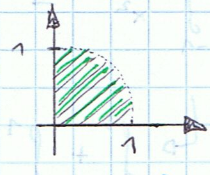
$\hookrightarrow \gamma = 0{,}577 \ldots$ „Euler - Mascheroni - Konstante" (irrational)

Also: $H_n \sim \ln n + \gamma$

○ $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2$



○ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\,dt$



$x = \sin t$

$\frac{dx}{dt} = \cos t$

$dx = \cos t\,dt$

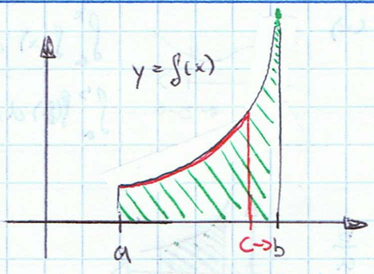
$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$ siehe Übungen partielle Integration

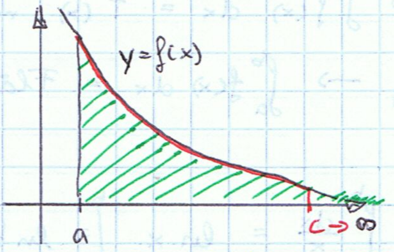
$= \frac{1}{2} \cdot (t + \sin t \cdot \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

E UNEIGENTLICHE INTEGRALE



uneig. Integral 1. Art.

$$\lim_{c\to b}\int_a^c$$



uneig. Integral 2. Art

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c$$

Def.: Sei f auf $[a,b)$ bzw $[a,\infty)$ definiert und auf jedem Teilintervall $[a,c]$ integrierbar. Dann sind…

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

… uneigentliche Integrale 1. bzw. 2. Art. Die Integrale konvergieren, falls die angegebenen Limiten existieren.

Bsple:

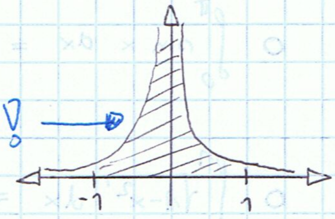
- $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0} 2\cdot\sqrt{x}\,\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0}\left(2-2\cdot\sqrt{c}\right) = \underline{\underline{2}}$$

  uneig. bei $x=0$

- $$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} -e^{-x}\,\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(-\underset{\downarrow\atop 0}{e^{-c}} + e^{-1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

  (unendlich breite Fläche z.B. rad. Zerfall)

- $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \overset{?}{=} -\frac{1}{x}\,\Big|_{-1}^1 = -1-1 = -2 \text{ falsch!}$$



$$\hookrightarrow \int_{-1}^0 + \int_0^1 \qquad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0}\int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0} -\frac{1}{x}\,\Big|_{-1}^c = \lim_{c\to 0}\left(-\frac{1}{c}-1\right) \nexists$$

○ Gamma fkt.

$$\Gamma(x) \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad \text{für } x > 0$$

uneigentlich bei $t=0$ (für $x<1$) und bei $t=\infty$

z.B. $\Gamma = \int_0^\infty e^{-t}\, t^0\, dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 0 + 1 = 1$

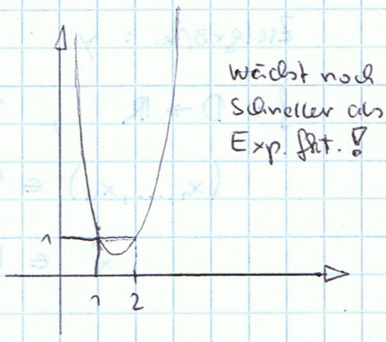
ferner $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ (nachrechnen)

$\Longrightarrow \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

allg. $\Gamma(n+1) = n!$



Wächst noch schneller als Exp. fkt.!

Satz: (Integralkriterium): Sei $f(x) \geq 0$ (für $x \geq 1$) und monoton fallend,

Dann gilt:

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \int_1^\infty f(x)\, dx \text{ konvergent}$$

Bsp.: harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$, denn $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^\infty = \ln \infty$ existiert nicht!

$f(x) = \frac{1}{x}$

3 GRUNDLAGEN DER DIFF.- UND INT. RECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

A Funktionen in mehreren Variablen

① Bsple u. Darstellungen

Einflussgrößen: $x_1, x_2, \dots, x_n$

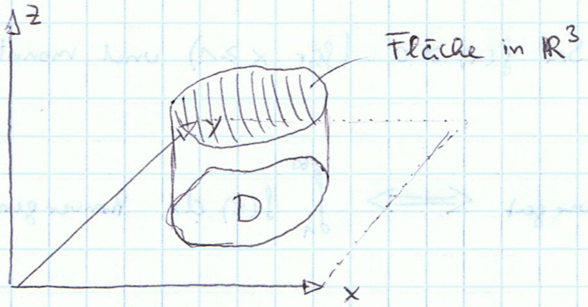
Zielgröße: y

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \in D \longmapsto y = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \in D \longmapsto y = f(\vec{x})$$

Sonderfall $n = 2$: $z = f(x, y)$



Bsple:

- Gesamtwiderstand in einem Wechselstromkreis.

$$R_{ges}(R, R_L, R_C) = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

ohmscher Widerstand, induktiv, kapazitiv

- Produktionsfunktion

$$P(A, K) = c A^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

Output, Arbeit, Kapital

$c > 0$, $0 < \alpha < 1$

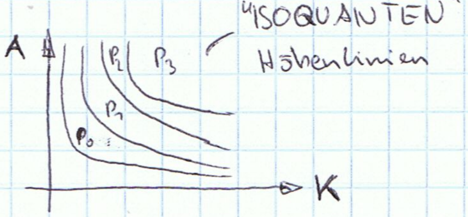
$D = \{(A, K) \in \mathbb{R}^2 \mid A > 0, K > 0\}$

$= (\mathbb{R}^+)^2$

Frage: Für welche Kombinationen der beiden Produktionsfaktoren A und K wird ein geg. Produktionsergebnis P_0 erreicht?

$P = P_0$: $\quad P_0 = c \cdot A^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} \quad \Longrightarrow A = \left(\frac{P_0}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot K^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$

z.B.: $\alpha = \frac{1}{2} \qquad A(K) = \text{konst} \cdot \frac{1}{K}$



○ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\quad z = ax + by + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

lin Fkt., Ebene

$z = 4x^2 - 10xy + 9y^2$

quadr. Polynomfkt., Paraboloid

$z = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ elementare Fkt. in 2 Variablen

○ Polynomfunktionen

z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = a x_1^{4} x_2^{2} x_3^{1} + b \cdot x_1 x_2^2 + c \cdot x_1 x_3 + d$

Polynom vom Grad 7 $\qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

allg. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \cdots\cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot x_3^{i_3} \cdots\cdots x_n^{i_n}$

Grad: höchstens $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$,

sodass $a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$

17.12.14

o Quadratische Formen

sei $A = (a_{ij})$ symmetrische $n \times n$ Matrix (d.h. $A^T = A$)

bilden $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x_1, \dots, x_n) = q(\vec{x}) = \underset{1 \times n}{\vec{x}^T} \cdot \underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\vec{x}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

↑ Polynomfkt vom Grad 2

$n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$q(x,y) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} ax & by \\ bx & cy \end{pmatrix} =$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2$$

$$\underline{= ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

z.B. $q(x,y) = 4x^2 - 10xy + 9y^2 = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Frage: Wann nimmt $q(\vec{x})$ (für $\vec{x} \neq \vec{0}$) nur positive oder nur negative Werte an?

Def.: Eine quadratische Form $q(\vec{x}) \cdot A \cdot \vec{x}$ (bzw. die zugehörige Matrix A) heißt:

(i) positiv definit, falls $q(\vec{x}) > 0$ $(\forall \vec{x} \neq \vec{0})$

(ii) negativ definit, falls $q(\vec{x}) < 0$ $(\forall \vec{x} \neq \vec{0})$

(iii) positiv semidefinit, falls $q(\vec{x}) \geq 0$ $\forall \vec{x}$

(iv) negativ semidefinit, falls $q(\vec{x}) \leq 0$ $\forall \vec{x}$

(v) indefinit, sonst.

z.B.: $q(x,y) = 4x^2 - 10xy + 9y^2 = \underbrace{4x^2 - 10xy + \frac{25}{4}y^2}_{} - \frac{25}{4}y^2 + 9y^2$

$$\left(2x - \frac{5}{2}y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2 \geq 0$$

$$= 0 \iff x = 0, y = 0$$

$\Rightarrow$ q ist positiv definit.

Satz: (Hauptminoren Kriterium) Eine quadratische Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ (bzw die zugehörige Matrix A) ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoranten positiv sind:

$$a_{11} > 0 , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 , \ldots , \quad |A| > 0$$

Hauptminoranten

Die Form q ist genau dann negativ definit, wenn $-q$ (bzw. $-A$) positiv definit ist.

z.B.: $n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pos. definit $\iff$ $a > 0$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0$$

insbes. $q = 4x^2 - 10xy + 9y^2$

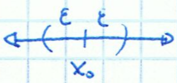
$$\left.\begin{array}{l} \longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} : \quad a = 4 > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 25 = 11 > 0 \end{array}\right\} \text{pos. definit}$$

② Grenzwert v. Stetigkeit

Abstand im $\mathbb{R}^n$: $\quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \underset{\text{euklidischer Abstand}}{\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}}$

ε-Umgebung $\quad U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon \} \qquad \varepsilon > 0$

$n = 1$



offenes Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$n = 2$

offener Kreis um $\vec{x}_0$ mit Radius ε

$n = 3$ $\qquad$ offene Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius ε

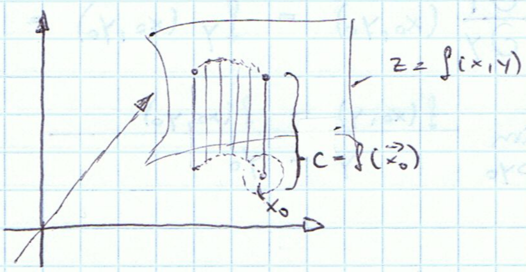
Sei $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$

Was bedeutet $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$?

Def.: f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\underset{\text{delta}}{\delta} > 0$ existiert, sodass:

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < c \quad \forall \vec{x} \in D, \vec{x} \neq \vec{x}_0$$

f heißt stetig in $\vec{x}_0$, falls $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$, bzw. stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.



„Hat kein Loch - nicht zerrissen“

Es gilt:

- Durch Anwendung der Grundrechnungsoperationen und des Einsetzens erhält man aus stetigen Fkten. immer wieder stetige Funktionen.
- Eine auf einem abgeschlossenen und beschränkten Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (z.B. abg. Kugel, abg. Quader) stetige Funktionen ist dort beschränkt und nimmt in D ihr Maximum und Minimum an.

③ Partielle Ableitungen

$z = f(x,y)$, $(x_0, y_0) \in D$ fest

betrachten $f(x, y_0)$: Fkt. in 1 Variablen x , für festes $y = y_0$

$\hat{=}$ Kurve auf d. Fläche $f(x,y)$

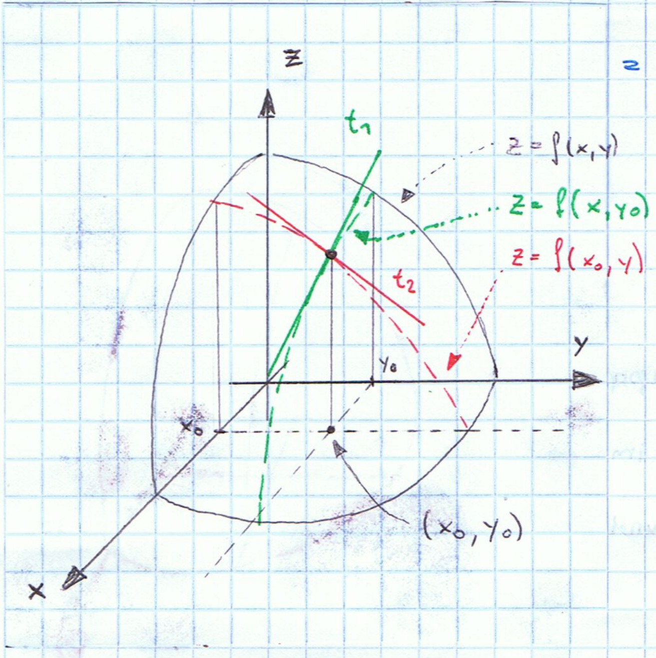
bilden $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\left[\, d \cong \underset{\llcorner\text{partiell}}{\partial} \,\right]$

$= f_x(x_0,y_0)$

partielle Ableitung von f nach x in (x_0, y_0)

analog: partielle Ableitung nach y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) =$

$= \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$



f_x = Anstieg d. Tangente t_1

f_y = Anstieg d. Tangente t_2

im Punkt (x_0,y_0)

t_1, t_2 spannen die Tangentialebene im Pkt. (x_0, y_0) auf:

$$z = t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$$

denn: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$ Ebenengleg. in Parameterform

Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0$$

$$f_x \cdot x + f_y \cdot y - z = f_x \cdot x_0 + f_y \cdot y_0 - f(x_0,y_0) \;\Big|\; z = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f(x_0,y_0)$$

Höhere Ableitungen

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \\ \vdots \qquad\qquad \cdot \qquad f_{yx}, f_{yy} \end{array}\right\} \text{d. h. 4 verschiedene parl. Ableitungen 2. Ordnung}$$

wobei zumeist $f_{xy} = f_{yx}$ (Satz v. Schwarz)

weiters $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$, usw. 8 part. Abl. 3. Ordnung

Bsp.: ○ $z = f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^3 + \sin(x^2+y) + 1$

$$f_x = 3x^2 + 4xy + \cos(x^2+y) \cdot 2x$$

$$f_y = 2x^2 - 3y^2 + \cos(x^2+y) \cdot 1$$

$$f_{xx} = 6x + 4y - \sin(x^2+y) \cdot 2x \cdot 2x + \cos(x^2+y) \cdot 2$$

$$f_{xy} = 4x - \sin(x^2+y) \cdot 2x = f_{yx}$$

$$f_{yy} = -6y - \sin(x^2+y)$$

7.1.15

$f: D \to \mathbb{R}$
$\subseteq \mathbb{R}^2$
$\subseteq \mathbb{R}^n$

z.B. $z = f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + \sin(xy+1)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \text{analog}$$

Bsp.: $P(A,K) = c \cdot A^{\alpha} K^{1-\alpha}$ Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
$c > 0, \quad 0 < \alpha < 1$

Output: P; Arbeit (1. Faktor): A; Kapital (2. Faktor): K

$$\frac{\partial P}{\partial A} = c \cdot \alpha A^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \cdot c \cdot \left(\frac{K}{A}\right)^{1-\alpha}$$

Grenzproduktivität d. Faktors A

d.i. das Produktionsergebnis, welches durch eine zusätzliche Einheit des Faktors A erzielt werden kann.

allg. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

part. Ableitungen 1. Ordnung: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$

part. Ableitungen 2. Ordnung: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $i,j = 1, \dots, n$

Dabei gilt: Man differenziert nach x_i, indem man alle übrigen Variablen konstant hält.

B Differentialrechnung in mehreren Variablen

① Die totale Ableitung

sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$, $(x_0, y_0) \in D$ fest.

Def.: f heißt total differenzierbar in (x_0, y_0) $\Longleftrightarrow$

$$\exists a, b : \quad f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0)}_{\text{Tangentialebene}} + R(x,y)$$

mit $R(x,y) = o\left(\left\|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right\|\right)$

Approximations-fehler

d.h. f lässt sich lokal um (x_0, y_0) durch eine Ebene approximieren.

total diffbar $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ partiell diffbar

ang. f ist total diffbar, dann ist f auch partiell nach x, y diffbar,

denn: $f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + R(x,y)$

$y = y_0$: $f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = a(x-x_0) + b\cdot 0 + R(x,y_0)$

$x \to x_0$: $\dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = a + \dfrac{R(x,y_0)}{x-x_0}$

$$\downarrow \qquad\qquad \searrow 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a$$

analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b$

also ist f partiell nach x und y differenzierbar.

ABER: Umkehrung gilt nicht! (siehe Übung)

also: f total diffbar $\Rightarrow$ f partiell diffbar

und $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{a}\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + R(x,y)$

$$= f(x_0,y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}}_{\text{Gradient grad } f(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x,y)$$

Vektor aller Ableitungen = Gradient.

Analog für $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$:

f total diffbar in $\vec{x}_0 \Longleftrightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x})$

grad $f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\qquad$ $o(\|\vec{x}\|)$

Es gilt: Jede totale diffbare Fkt. ist auch stetig, ferner existieren alle partielle Ableitungen.

② Ableitungsregeln

(o) Alle Regeln für das gewöhnliche Differenzieren bleiben beim partiellen Differenzieren erhalten.

(i) Kettenregel

$n=2$ $\quad f(g,h) \longrightarrow$ zus. gesetzte Fkt. $\quad F(x) = f(g(x), h(x))$

$$\begin{tikzcd} & f(g,h) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ g(x) & h(x) \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \underbrace{f_g \cdot g'}_{} + \underbrace{f_h \cdot h'}_{}$$

bzw. $$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

analog für $f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$

$f(g(x,y), h(x,y))$

Bsp.: $f(g,h) = 3g^2 + 2h^4$, $\quad g(x) = \sin x$, $\quad h(x) = x \cdot \cos x$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

$$= 6g \cdot \cos x + 8h^3 \cdot (\cos x + x \cdot (-\sin x))$$

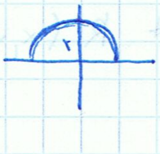
$$= 6 \cdot \sin x \cdot \cos x + 8x^3 \cos^4 x - 8x^4 \cos^3 x \sin x$$

(ii) Ableitung einer impliziten Funktion

sei $y = y(x)$ implizit geg. durch $F(x,y) = 0$ $\qquad y'(x) = ?$

z.B.: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ implizit geg. durch $x^2 + y^2 = r^2 \xrightarrow{\text{Abl.}} 2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{x}{y}$



$$\underbrace{x^2 + y^2 - r^2}_{F(x,y)} = 0$$

$F(x,y) = 0$

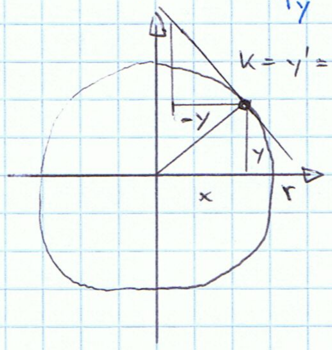
$$F(x, y(x)) = 0 \xRightarrow{\frac{d}{dx}} F_x \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}}$$

Satz: (Hauptsatz implizite Fktn): Sei $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig diffbar, $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann hat die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine eindeutig bestimmte Lsg. $y(x)$, für die gilt $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$.

Bsple:

- $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$



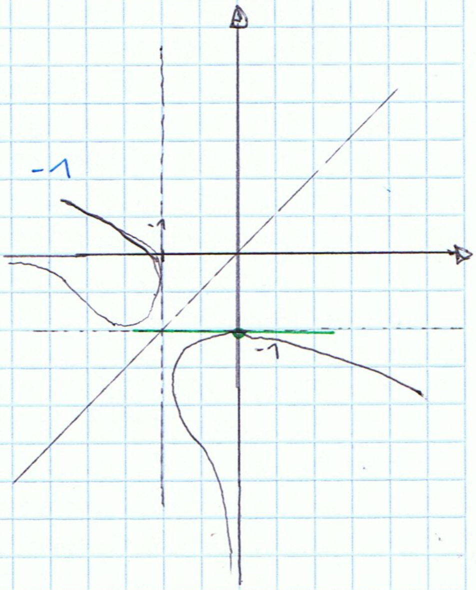
- $F(x,y) = e^{xy} + x + y = 0 \Rightarrow y = y(x)$ implizit geg., aber nicht explizit darstellbar.

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y \cdot e^{xy} + 1}{x \cdot e^{xy} + 1}$$

z.B.: $x = 0 \Rightarrow 1 + 0 + y = 0$, $y = -1$

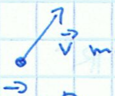
$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{(-1) \cdot e^0 + 1}{0 \cdot e^0 + 1} = 0$$

(Zeichnung)



14.1.15

③ Richtungsableitung



$\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$

$\vec{x} \in D$

Frage: Wie ändert sich f beim Übergang von $\vec{x}$ zu $\vec{x} + \vec{v}$?

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t} \qquad \text{mit } \|\vec{v}\| = 1$$

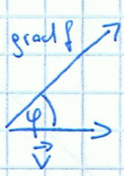
$$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \qquad \text{(falls } f \text{ total diffbar)}$$

Richtungsableitung von f in Richtung des Eigenvektors $\vec{v}$

insbes. $\vec{v} = \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Stelle

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_k = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_k} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f_{x_k} \cdot 1 = f_{x_k}$$

Frage: In welcher Richtung ändert sich f am stärksten?



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cdot \cos\varphi = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos\varphi$$

maximal falls $\cos\varphi = 1$. d.h. $\varphi = 0$

d.h. $\vec{v} \parallel \operatorname{grad} f$

Satz: Der Gradient grad f gibt die Richtung des größten Anstiegs einer Fkt. $f(\vec{x})$ an. Der Wert des größten Anstiegs ist $\|\operatorname{grad} f\|$.

Bsp.: $f(\vec{x}) = f(x,y,z) = e^{-xy} \cdot z^2$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}2\\-\ln 2\\3\end{pmatrix}$

○ Änderung in x-Richtung: $\frac{\partial f}{\partial x} = -ye^{-xy} \cdot z^2 \Big|_{\vec{x}_0} = \underline{\underline{36 \cdot \ln 2 \simeq 25{,}0}}$

○ Änderung in Richtung des Einheitsvektors $\vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

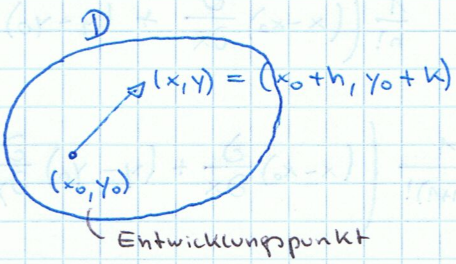
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \text{grad } f \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}-ye^{-xy} \cdot z^2\\ -xe^{-xy} \cdot z^2\\ e^{-xy} \cdot 2z\end{pmatrix}\Bigg|_{\vec{x}_0} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \ldots \simeq \underline{\underline{56{,}6}}$$

○ Maximale Änderung in Richtung grad f

$$\frac{\partial f}{\partial \, \text{grad} f} = \| \text{grad } f(x_0) \| = \ldots \approx \underline{\underline{79{,}9}}$$

④ Taylorentwicklung

sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $f(x,y)$



betrachten Hilfsfkt. $F(t) = f = (x_0 + th, y_0 + t \cdot k)$ $0 \le t \le 1$

insbes. $t=0$: $F(0) = f(x_0, y_0)$

$t=1$: $F(1) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y)$

entwickeln $F(t)$ in Taylorreihe um $t_0 = 0$

$$\Rightarrow F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{F''(0)}{2!} \cdot t^2 + \ldots$$

$t=1$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots$$

wobei $F'(0) = f_x(x_0+t \cdot h, y_0+t \cdot k) \cdot h + f_y(x_0+t \cdot h, y_0+t \cdot k) \cdot k \Big|_{t=0}$

$= f_x(x_0,y_0) \cdot h + f_y(x_0,y_0) \cdot k$ lt. Kettenregel

$$F''(0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x \cdot h + f_y \cdot k\right) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x \cdot h + f_y \cdot k\right) \cdot k$$

$$= f_{xx} \cdot h^2 + f_{yx} \cdot hk + f_{xy} \cdot hk + f_{yy} \cdot k^2$$

$$= f_{xx} \cdot h^2 + 2 f_{xy}\, h \cdot k + f_{yy} \cdot k^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y-y_0)}_{\text{lineare Approximation}} +$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2} \cdot \left(f_{xx} \cdot (x-x_0)^2 + 2 f_{xy} \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) + f_{yy} \cdot (y-y_0)^2\right) +}_{\text{quadr. Approximation}}$$

$+ \ldots +$ Restglied.

allg. Glied. $\frac{1}{n!}\left(\left(x-x_0\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y-y_0\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$

Restglied $\frac{1}{(n+1)!}\left(\left(x-x_0\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y-y_0\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(x_0 + \xi \cdot h,\ y_0 + \xi \cdot k\right)$

mit $0 < \xi < 1$

(Taylorreihenentwicklung für 2 Var.

Bsp.: $f(x,y) = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-2)$ ges. quad. Approx in $(0,1)$

$f = xy - 2x + \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}$ $\qquad f(0,1) = -1$

$f_x = y-2$ $\qquad f_x(0,1) = -1$

$f_y = x - \frac{1}{y^2} - \frac{4}{y^3}$ $\qquad f_y(0,1) = 3$

$f_{xx} = 0$

$f_{xy} = 1$

$f_{yy} = +\frac{2}{y^3} - \frac{12}{y^4}$ $\qquad f_{yy}(0,1) = -10$

entw.pkt

$$\Rightarrow f(x,y) \approx -1 - 1 \cdot (x-0) + 3 \cdot (y-1) + \frac{1}{2!}\left(0 + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot (y-1) - 10 \cdot (y-1)^2\right)$$

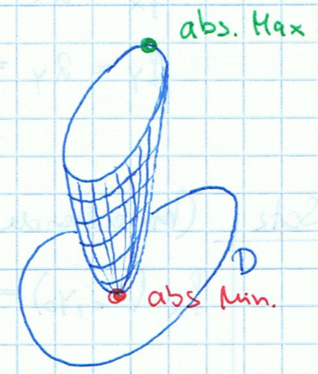
$$= -1 - x + 3 \cdot (y-1) + x \cdot (y-1) - 5 \cdot (y-1)^2$$

C Bestimmung von Extrema

① Lokale Extrema (ohne Nebenbedingungen)

betrachten Fkt. $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) : D \to \mathbb{R}$

suchen Maxima oder Minima von f



Def.: Eine Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, besitzt an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ ein

- relatives (= lokales) Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ von $\vec{x}_0$ gibt, sodass $f(\vec{x}) \le f(\vec{x}_0)$ bzw. $f(\vec{x}) \ge f(x_0)$ für alle $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D$ gilt.

- absolutes (= globales) Max. bzw. Min., wenn obige Ungleichung für alle $\vec{x} \in D$ gilt.

Satz: (Notwendige Bed. für relative Extrema): Besitzt f in einem inneren Punkt $\vec{x}_0$ ein rel. Extremum, so gilt $f_{x_1}(\vec{x}_0) = \dots = f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0$, kurz grad $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

$\vec{x}_0$ heißt dann stationärer Pkt.

Achtung: Diese Bedingung ist nicht hinreichend!!

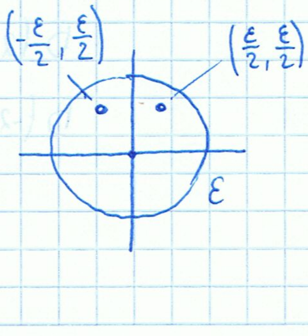
z.B. $f(x,y) = x \cdot y$ in $(0,0)$

$f_x = y\big|_{(0,0)} = 0$, $f_y = x\big|_{(0,0)} = 0$ ist stationärer Pkt.

ABER: $f(0,0) = 0$

$f\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{4} > 0$ → Sattelpkt.

$f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0$



Bsp.: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \qquad f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$$

$\underline{\text{rel} = \text{abs Min}}$

Satz: (hinreichende Bed für $n=2$): Gilt für $f(x,y)$, dass

$f_x(x_0,y_0) = 0$, $f_y(x_0,y_0) = 0$ und

$$D(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} > 0,$$

dann nimmt f in (x_0,y_0) ein relatives Extremum an, und zwar ein rel. Maximum für $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ und ein rel. Minimum für $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$. Im Fall $D(x_0,y_0) < 0$ liegt kein Extremum vor, sondern ein Sattelpunkt.

$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = H_f$ Hesse-Matrix von f

Bsp.: $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

notw. Bed.:
$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f_y = 6xy - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)$$

4 stat. Punkte

hinr. Bed. $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36 \cdot (x^2 - y^2)$

$$\left.\begin{array}{l} D(1,2) = -108 < 0 \\ D(-1,-2) = \quad < 0 \end{array}\right\} \text{Sattelpunkte}$$

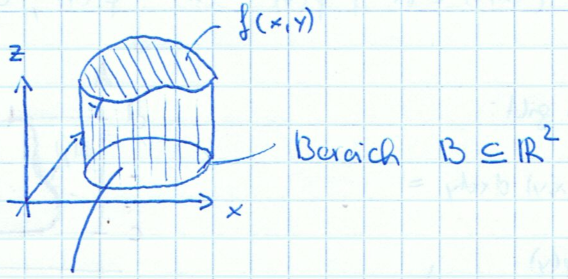
$D(2,1) = 108 > 0$, $f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow$ rel. Min.

$D(-2,-1) =$ $\qquad\Rightarrow$ rel. Max.

21.1.15

D. Bereichsintegrale

2 dim Bereichsintegral



Volumen unter der Fläche $z = f(x,y)$ über Bereich B

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\Delta B_i \to 0} \sum_i f(x_i,y_i) \cdot \Delta B_i$$

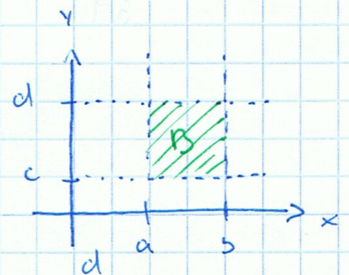
Limes v. Zwischensummen

Funktionswerte an Zw. stellen

Teilflächen v. B

insbes. $\iint_B 1\,dx\,dy = |B|$ Fläche des Bereichs B

Wie berechnet man ein Bereichsintegral über B: $\iint_B$?



○ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

$= [a,b] \times [c,d]$ Rechtecksbereich

Dann gilt: $$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

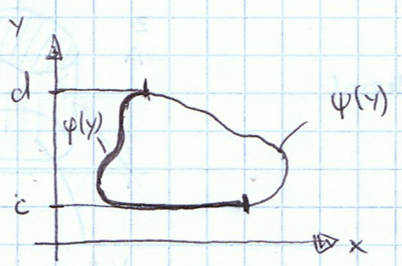
Bsp.: $B = [1,2] \times [0,3]$

$f(x,y) = x^2y^3 + x$

$$\iint_B (x^2y^3 + x)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^3 (x^2y^3 + x)\,dy \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^4}{4} + xy \right) \Big|_{y=0}^{3} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{81}{4}x^2 + 3x \right) dx = \frac{81}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{x=1}^{2} = \underline{\underline{\frac{207}{4}}}$$ (Maßzahl f. d. Volumen)

○ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\}$ projizierender Bereich



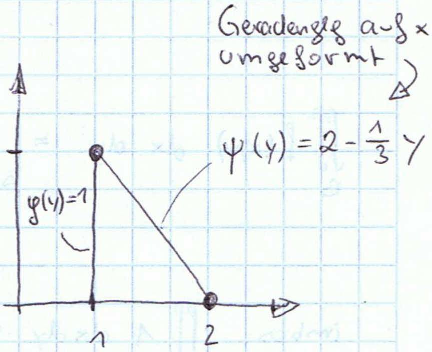
Dann gilt:

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy =$$

$$\int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$ (Satz v. Fubini)

Bsp.: B = Dreieck durch $(1,0), (2,0), (1,3)$

$f(x,y) = x+y$



$$\iint_B (x+y)\,dxdy = \int_0^3 \left(\int_1^{2-\frac{1}{3}y} (x+y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^3 \left| \frac{x^2}{2} + xy \right|_{x=1}^{2-\frac{1}{3}y} dy = \int_0^3 \left(-\frac{5}{18}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{3}{2} \right) dy = \frac{7}{2}$$

4. ELEMENTARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

A Gewöhnliche Differentialgleichungen u. allg. Theorie

Bsp 1. freier Fall:

sei $s(t)$ = Weg (Zeit), g Erdbeschleunigung ($9{,}81\ m s^{-2}$)

$s''(t) = g$ gewöhnliche Diff.glg. 2. Ordnung für $s(t)$

$\Rightarrow s'(t) = \int g\, dt = gt + C_1$

$s(t) = \frac{g}{2} t^2 + C_1 \cdot t + C_2$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\quad$ allg. Lsg.

Anfangsbedingungen zur Bestimmung von C_1, C_2:

$s(0) = s_0$, $v(0) = s'(0) = v_0 \Rightarrow s_0 = C_2$, $v_0 = C_1$

$\Rightarrow s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + s_0$ $\quad$ part. Lsg.

Bsp 2. logistisches Wachstum

sei $N(t)$ = Populationsgröße (Zeit), r Wachstumsrate, K, Sättigungskonst.

$N'(t) = r \cdot N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ $\quad$ gewöhnliche, nicht lineare, Diff.glg. 1. Ordnung.

besitzt die Lösung $N(t) = \frac{K}{1 + C \cdot e^{-r \cdot t}}$, $C \in \mathbb{R}$

denn $\quad$ sowie $N=0$

$$\left.\begin{aligned} N'(t) &= -\frac{K}{(1+C\cdot e^{-r\cdot t})^2} \cdot C \cdot e^{-r\cdot t} (-r) = \frac{CK \cdot r \cdot e^{-r\cdot t}}{(1 + C \cdot e^{-r \cdot t})^2} \\ rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) &= \ldots\ldots = \frac{CK \cdot r \cdot e^{-r\cdot t}}{(1 + C \cdot e^{-r\cdot t})^2} \end{aligned}\right\} \checkmark$$

Anfangsbed. $N(0) = N_0$: $\quad N_0 = \frac{K}{1+C} \Rightarrow C = \frac{K - N_0}{N_0}$

$\Rightarrow N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_0}{N_0} e^{-r \cdot t}}$ $\quad$ part. Lsg. zur Anf. bed. $N(0) = N_0$

Bsp 3. Diffusion, Wärmeleitung (eindimensional)

sei $c(x,t)$ = Konzentration (Ort, Zeit)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$ parl. Dgl. 2. Ord.

└ Diffusionskonstante.

eine Lösung ist z.B. $c(x,t) = \left(A \cdot \cos(Cx) + B \cdot \sin(Cx)\right) \cdot e^{-C^2 D t}$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ beliebig.

→ meist genügt numerische Methode; allg. Lsg kaum auffindbar (Finite Element Meth).

Betrachten Fkt. $y(x)$ und deren Ableitungen $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ heißt gewöhnl. Dgl. n-ter Ordnung

insbes. $F(x, y, y') = 0$ gew. Dgl. 1. Ord.

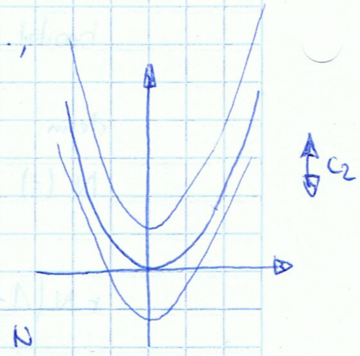
$y' = f(x,y)$ explizite Dgl. 1. Ord.

Lösung $y(x)$ ist Fkt., welche die geg. Dgl erfüllt.

- allg. Lsg. enthält beliebig wählbare Parameter $C_1, C_2, \ldots,$

  entspricht einer Kurvenschar.

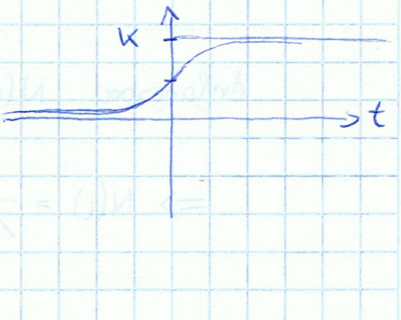
  ad. Bsp 1.: $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$ z.B. $C_1 = 0$



- part. Lsg. durch spez. Wahl d. Parameter

  zu vorgeg. Anfangsbedingungen

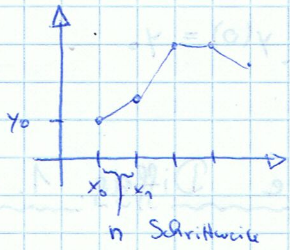
  ad Bsp 2.: $N_0 = \frac{K}{2} \Rightarrow C = 1$, $N(t) = \frac{K}{1 + e^{-r \cdot t}}$



Wie findet man Lösungen einer Dgl?

- o exakte Lsg. verfahren für bestimmte Dgl. typen. (siehe nächster Abschn.)
- o Näherungsverfahren

Anfangswertproblem: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

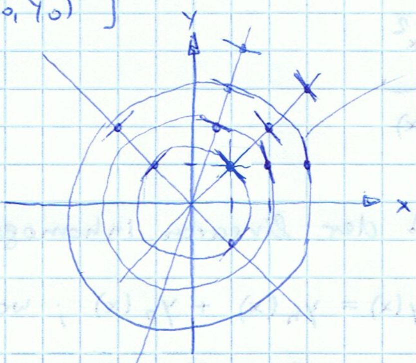


x	$y(x)$
x_0	y_0
x_1	⋮
⋮	

Geometrische Deutung für das Auffinden v. Lösungen einer Diffglg $y' = f(x,y)$:

Punkt (x_0, y_0)
Richtung $y_0' = f(x_0, y_0)$ $\Big\}$ (x_0, y_0, y_0') Linienelement → Richtungsfeld.

zB. $y' = -\frac{x}{y}$



Lösungen sind Kurven, welche auf das Richtungsfeld passen.

28.1.15

$y = y(x)$ $\quad F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ gewöhnl. Diffglg n-ter Ordnung

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

explizite Dgl 1. Ordnung
Man bekommt allg. Lsg.
Man braucht Anfangsbed.

B Lineare Diffglg. 1. und 2. Ordnung

① Lineare Dgl.en 1. Ordnung:

$$y' + a(x) \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{homogene Glg} \\ S(x) & \text{inhomogene Glg} \end{cases}$$

↳ Störfunktion

z.B. $\underbrace{y' - \frac{1-x}{x}}_{a(x)} \cdot y = \underbrace{4x^2}_{S(x)}$

Satz: Die Lösungsgesamtheit der linearen inhomogenen Dgl. $y' + a(x) \cdot y = S(x)$ ist gegeben durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wo $y_h(x)$ die allg. Lsg. der zugehörigen homogenen Gl. $y' + a(x) \cdot y = 0$ und $y_p(x)$ eine bel. partikuläre Lsg. der inhomogenen Gl. ist.

Lösungsweg:

1. Lösung der homogenen Glg durch „Trennen der Variablen"
2. Bestimmung einer partikulären Lsg. der inhomogen Glg. durch „Variation der Konstanten"
3. Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

ad 1. $y' + a(x) \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -a(x)$ $\quad \left(\ln|y| \, dx = \frac{1}{y} \cdot y' \right)$

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + C$$

$$y_h = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Betrag kann man hier vergessen! Vorzeichen packt man in d. Konstante

in d. Praxis: $\frac{dy}{dx} + a(x) \cdot y = 0$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx \qquad \text{„TdV"}$$

ad 2.) Ansatz für partikuläre Lsg.: $y_p(x) = \underset{\uparrow}{C(x)} \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$

„Variation" d. Konstanten

Bsp.: $y' - \frac{1-x}{x} \cdot y = 4x^2$

homog. Glg.: $y' - \frac{1-x}{x} \cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{x} \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1-x}{x} \right) dx$$

auch ln C

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_0$$

$$y_h = x \cdot e^{-x} \cdot C \quad , \; C \in \mathbb{R} \quad \text{(homogene Lsg.)}$$

Variation d. Konst.: $y_p(x) = C(x) \cdot x \cdot e^{-x}$

$$\Rightarrow y_p'(x) = C' \cdot x \cdot e^{-x} + C \cdot 1 \cdot e^{-x} - C \cdot xe^{-x}$$

Achtung: C ist hier eine Fkt.!

Einsetzen in inhomogene Dgl.:

$$C'xe^{-x} + \cancel{Ce^{-x}} - \cancel{Cxe^{-x}} \underbrace{- \frac{1-x}{x} \cdot Cxe^{-x}}_{-\cancel{Ce^{-x}} + \cancel{Cxe^{-x}}} = 4x^2$$

$$C'xe^{-x} = 4x^2$$

$$C' = 4xe^{x}$$

Achtung! Alle C müssen sich kürzen
-> nur C' bleibt über! -> sonst RF.

$$C = 4\int xe^{x}\,dx = 4xe^{x} - 4\int 1 \cdot e^{x}\,dx =$$

$$= 4xe^{x} - 4e^{x}$$

$$= 4e^{x} \cdot (x-1) + \cancel{C}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = C \cdot xe^{-x} = 4e^{x}(x-1) \cdot xe^{-x}$$

$$= \underline{4x(x-1)}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$= \underline{\underline{Cxe^{-x} + 4x(x-1)}} \quad , \; C \in \mathbb{R} \quad \text{allg. Lsg.}$$

② Lineare Dgl.en 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = \begin{cases} 0 & \text{homogene Glg.} \\ S(x) & \text{inhomogene Glg.} \end{cases}$$

konst. Koeff.

z.B.: $y'' + y' - 2y = 2x - 3$

Wiederum gilt: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

- $y(x)$: allg. Lsg. d. inhomo. Glg.
- $y_h(x)$: allg. Lsg. d. homo. Glg. „Exponentialansatz"
- $y_p(x)$: bel. part. Lsg. d. inhomo. Gl. „Methode des unbestimmten Ansatzes"

Weltbevölkerung
$y' = r\cdot y$
$y = C\cdot e^{r\cdot x}$

1.) Bestimmung von $y_h(x)$:

betrachten hom. Glg. $y'' + a\cdot y' + b\cdot y = 0$

machen Ansatz $y_h(x) = e^{\lambda x}$ „Exponentialansatz"

$$\Rightarrow y_h' = \lambda\cdot e^{\lambda x}$$

$$y_h'' = \lambda^2\cdot e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\cdot\lambda e^{\lambda x} + b\cdot e^{\lambda x} = 0$$

$\lambda^2 + a\cdot\lambda + b = 0$ charakteristische Gleichung.

3 Fälle:
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Satz: Sind λ_1, λ_2 die Lösungen der charakteristischen Glg. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, dann lautet die allg. Lsg. der homogenen Dgl.

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1, \lambda_2 \text{ reell}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\alpha x}\cdot\left(C_1\cdot\cos\beta x + C_2\cdot\sin\beta x\right) & \lambda_1,\lambda_2 = \alpha \pm i\beta \text{ konj. komplex} \\ (C_1 + C_2 x)\cdot e^{\lambda x} & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2.) Bestimmung von $y_p(x)$: „Methode des unbestimmten Ansatzes"

z.B. Störfunktion $s(x) = a_0$ oder $s(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$\Rightarrow$ Ansatz $y_p(x) = A_0$ oder $y_p(x) = A_0 + A_1 \cdot x$

Störfkt. $s(x)$	Versuchslösung $y_p(x)$
1	A
$a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_k \cdot x^k$	$A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_k \cdot x^k$
e^{rx}	$A \cdot e^{r \cdot x}$
$(a_0 + \ldots + a_k \cdot x^k) \cdot e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + \ldots + A_k \cdot x^k) \cdot e^{rx}$

Zusatz: Ist ein Summand der Versuchslsg. bereits Lösung der homogenen Glg., so ist der gesamte Lösungsansatz mit x zu multiplizieren. Vorgangsweise ggf. wiederholen. „Resonanzfall"

Bsp.: $y'' + y' - 2y = 2x - 3$

homo. Glg.: $y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ (char. Glg.)

$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + 2}}_{3/2} = \begin{cases} +1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$

part. Lsg.: $s(x) = 2x - 3$

$\Rightarrow$ Ansatz $y_p(x) = Ax + B$ $\quad (y_p' = A,\ y_p'' = 0)$

einsetzen: $0 + A - 2 \cdot (Ax + B) = 2x - 3$

$-2Ax + (A - 2B) = 2x - 3$

Koeff.vergl. $\left.\begin{array}{ll} x^1: & -2A = 2 \Rightarrow A = -1 \\ x^0: & A - 2B = -3 \Rightarrow B = 1 \end{array}\right\} y_p = -x + 1$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x} + 1 - x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, allg. Lsg.