

# Prüfungen aus WS24

## Prüfung 1:

Am Anfang hat er eine Prädikatenlogische Formel ( $[\text{forall } x \text{ forall } y (P(x) \vee P(y))] \rightarrow \text{forall}(x)$ ) an die Tafel geschrieben und gefragt, ob mir bei der was auffällt. Ich habe kurz überlegt und gemeint, dass sie allgemeingültig ist. Er hat mir zugestimmt und gefragt, wie man das zeigen kann. Ich habe Resolution geantwortet und dann meinte er sich soll Allgemeingültigkeit mit Resolution zeigen. Ich habe dann die Resolution (mit 2 kleinen Hängern) gemacht.

Dann hat er mich gefragt was  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_0$  Mengen sind. Dazu meinte ich, dass man diese Mengen mit Formel mit (k)einem unbeschränkten Existenzquantor, beschrieben werden können. Und dass die (semi)entscheidbar sind. Er hat gefragt was (semi)entscheidbar bedeutet. Dann hat er nach einer 2. Art gefragt um  $\Sigma_1$  Mengen zu definieren. Da habe ich die Bildmenge einer tot. berechn. Funktion von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  vorgeschlagen. Und mit seiner Hilfe haben wir das schön aufgeschrieben.

Dann hat er mir die Definition von wohlfundiert genannt und mich nach dem Fundierungsaxiom gefragt. Das habe ich ihm genannt. Ich sollte dann Ähnlichkeiten zwischen dem Axiom und Wohlfundiertheit finden. Mit seiner Hilfe ging das.

Dann hat er mich gefragt ob ich eh einen 1er will. Ich war überrascht und meinte, dass es mir egal sei. Daraufhin wollte er einen Komplizierten Satz mit wohlfundierten Mengen mit mir beweisen. Das habe ich mit sehr viel Hilfe von ihm hinbekommen (Eigentlich hat er es bewiesen, und es mir erklärt).

Anschließend hat er noch 2 Aussagen, (die mit dem gerade bewiesenen zu tun hatten) aufgeschrieben und mich (unformal) zeigen lassen dass sie äquivalent sind.

Als letztes sollte ich ihm eine Überabzählbare Menge nennen. Ich meinte  $\Omega_1$  und durfte gleich erklären was das ist. Dann hat er gefragt, warum das eine Menge ist und wollte die Axiome hören, mit denen man  $\Omega_1$  konstruiert. Das ist mir nach ca. 75 min. nicht eingefallen und er hat auch hier sehr geholfen. Antwort wäre Ersetzungsaxiom auf Potenzmenge von  $\Omega \times \Omega$  anwenden und alles mit  $\Omega$  vereinigen.

Dann waren wir fertig und er hat mir einen 1er gegeben. Gesamtdauer: 1,5h

## Prüfung 2:

Anfang: Was ist eine vollständige Theorie + Beispiel, hab dann DLO gesagt und zeigen müssen, warum DLO vollständig ist (also genau gleich wie oben)

Dann was ist eine Ordinalzahl, hab ihm dann alles hingeschrieben, aber er hat dann gemeint, dass das nicht ganz stimmt. Dann hat er mir ein Beispiel gegeben, in der die Definition von mir gilt, aber die keine Ordinalzahl ist. Ich bin dann nicht draufgekommen, letztendlich gings darum, dass die Relation die Elementrelation sein muss.

Dann wollte er einfach ein paar Ordinalzahlen aufgezählt haben und dann wissen, wie man zu  $\Omega_1$  kommt (also auch wieder wie oben). Hab dann alles erklärt mit Potenzmenge, Ersetzungsaxiom, usw. Er wollte dann haben, dass ich ihm die Ersetzungsfunktion genau angebe, da haben wir dann hin und her und sind dann gemeinsam auf eine gekommen. Zum Schluss wollte er wissen, ob wir damit wirklich alles in  $\Omega_1$  treffen und ich sollte das beweisen, nach längerem überlegen hat er mich gefragt, ob ein 2er ok ist, ich hab ja gesagt und er hat mir erklärt warum.

### Prüfung 3:

Anfang: Was ist eine vollständige Theorie? Ein Beispiel einer vollständigen Theorie. Ich habe mit DLO geantwortet, da wir das in der Übung bewiesen haben. Dann musste ich ihm das Dichtheitsaxiom aufschreiben und zeigen warum DLO vollständig ist (weil alle abzählbaren Modelle isomorph zu  $\mathbb{Q}$  sind und alle überabzählbaren Modelle laut Löwenheim-Skolem ein abzählbares Untermodell haben, welches wiederum isomorph zu  $\mathbb{Q}$  ist).

Dann: Was ist eine transitive Menge?

Beweis, dass es für jede Menge eine transitive Obermenge (transitive Hülle) gibt.

Dann hat er mich gefragt welche Note ich haben möchte, ich habe gesagt, dass eine gute Note super wäre. Dann hat er gemeint, dass wir etwas machen müssen, das wir noch nicht direkt in der VO besprochen haben:

Zeigen, welche Axiome in folgender Menge gelten:  $H := \{x \mid \text{transitive Hülle von } x \text{ ist endlich}\}$  (es gelten alle außer Unendlichkeitsaxiom)

Dann haben wir noch ein paar Eigenschaften von  $H$  gezeigt, beispielsweise, dass alle endlichen Mengen in  $H$  liegen.

Beweis, dass  $V_\omega = H$ :

$V_\omega$  Teilmenge  $H$  ist leicht, da die Transitive Hülle aller endlichen Mengen wiederum endlich ist.

$H$  Teilmenge  $V_\omega$  kann man durch die Kontraposition zeigen: Sei  $B = \{x \mid x \text{ element von } H \text{ und } x \text{ kein element von } V_\omega\}$ . Sei  $B$  nicht leer. Aus dem Fundierungsaxiom folgt, dass es eine Element  $b_0$  in  $B$  gibt, dessen Element nicht in  $B$  sind.  $b_0$  ist endlich, daraus folgt, dass es ein  $V_n$  gibt, sodass  $b_0$  Teilmenge von  $V_n \Rightarrow b_0$  element von  $V_\omega$ . Widerspruch.

Meine Prüfung hat eine Stunde gedauert und ich habe eine Eins bekommen.

Generell war er sehr nett und hat immer etwas geholfen wenn ich nicht weiter wusste (vor allem beim Teil den wir nicht in der VO besprochen haben). Was er hier sehen wollte ist, dass man mitdenken kann.

### Prüfung 4:

Als erstes hat er mich gefragt, was eine vollständige Theorie ist und ob ich eine kenne. Ich meinte die DLO Axiome oder auch die Theorie der unendlichen Strukturen, also die Theorie die alle Sätze der Form „es gibt mindestens  $n$  Elemente“ enthält. Dann sollte ich beweisen, dass diese Theorie vollständig ist. Hierbei muss man verwenden, dass jede konsistente Theorie in einer abzählbaren Sprache auch ein (höchstens) abzählbares Modell hat (das gibt es, nämlich das Modell, das wir im Beweis vom Vollständigkeitsatz konstruiert haben).

Daraufhin kam die Frage, ob die Struktur, die wir im Beweis vom Vollständigkeitsatz konstruiert haben auch endlich sein kann, oder ob sie abzählbar unendlich sein muss. Habe mich erst bisschen verhaspelt, aber die Antwort ist ja, beispielsweise könnte eine Theorie ja den Satz enthalten „es gibt nur ein Element“. Dann kann natürlich die Struktur, die wir im Beweis konstruieren auch nur ein Element enthalten.

Anschließend hat er mich gefragt, ob jede Menge einen transitiven Abschluss hat, also ob es für jede Menge  $A$  eine Obermenge  $T$  gibt, die transitiv ist. Ich sollte diese hinschreiben und mit den Axiomen begründen, dass es diese Menge auch gibt. Hierfür haben wir auch den Rekursionsatz benutzt und er wollte ziemlich genau wissen, welche Version von diesem und was die funktionale Klasse ist, die wir betrachten bzw. durch welche Formel sie gegeben ist.

Anschließend hat er die Menge  $H_0 := \{A \mid A \text{ hat endlichen transitiven Abschluss}\}$  definiert und ich sollte diese erst charakterisieren und überlegen, welche ZFC Axiome darin gelten. Dann kam die Frage wie diese Menge mit  $V_\omega$  zusammenhängt. Tatsächlich ist  $H_0 = V_\omega$ , was wir gezeigt haben. Hier wollte er auch Details ziemlich genau wissen, was ich ziemlich schwierig fand. Er hat aber auch mitüberlegt, weshalb es trotzdem machbar war.

Ich fand die Prüfung insgesamt sehr angenehm, es hat echt Spaß gemacht sich mit ihm zu unterhalten. Sie ging ca. 50 Minuten, habe aber nicht genau auf die Uhr geschaut. Ich fand seine Fragen ziemlich schwer und habe öfters erst falsche Dinge behauptet, was ich dann durch weiteres Nachfragen von seiner Seite irgendwann gemerkt habe. Er meinte aber auch, dass er mich bewusst Sachen gefragt hat, die wir nicht konkret in der Vorlesung hatten, sondern die ich mir selber überlegen muss, weshalb es auch nicht schlimm war, wenn ich etwas mal nicht direkt gesehen habe. Die Atmosphäre war auch total gut, zwischendurch hat sein Handy geklingelt und er hat kurz telefoniert während ich die Tafel gewischt habe. Danach hat er das Gespräch aber auch relativ schnell beendet und die Prüfung ging weiter.

## Prüfungen aus irgendeinem Semester

### Prüfung 1:

Von mir wollte er wissen, was ist das Paarmengenaxiom, das schwache Paarmengenaxiom und wie hängen die zusammen, dann wollte er haben welche Instanz vom Aussonderungsaxiom man braucht um zu zeigen dass sie äquivalent sind.

Dann hat er mich ca. gefragt wie Resolution geht und hat mich eine einfache rechnen lassen. Dann was sind entscheidbare Mengen und semientscheidbare Mengen, Beweis dass jede semientscheidbare eine Projektion einer entscheidbaren ist.

Dann was ist  $\omega_1$ , und die Definition von der Hartogs Menge, warum ist jede abzählbare Menge darin beschränkt.

Und dann noch warum ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar, und welche Axiome verwendet man da (AC unter anderem).

### Prüfung 2:

Was ist eine Ordinalzahl? Was gilt für die Ordinalzahlen? (Bilden eine echte Klasse. Warum?...)

Wieso gibt's immer eine isomorphe Ordinalzahl? (Beweis mit Rangfunktion, Ersetzungsaxiom,...)

Was ist eine Henkin Theorie? Wo braucht man die genau? (also auch welcher Schritt im Beweis des Vollständigkeitssatz)

Dann hat er mir vom Satz von Löwenheim-Skolem erzählt und wir haben den gemeinsam bewiesen.

### Prüfung 3:

Definition Sigma1 Menge und Sigma1 Formel. Unter welchen Operationen sind Sigma1 Mengen abgeschlossen? Wieso ist eine Formel mit 2 unbeschränkten Existenzquantoren äquivalent zu einer Sigma1 Formel? Ist die Formel „ $\forall x < y \exists u: \phi(x,y,u,p)$ “ ( $\phi$  ist Sigma0 Formel) äquivalent zu einer Sigma1 Formel? Kann man auch Quantoren durch Terme beschränken? Konkret wollte er wissen ob „ $\exists u \forall x < u \cdot y^2: \phi(x,y,u,p)$ “ äquivalent zu einer Sigma1 Formel ist. Geht das auch wenn der Term die Variable enthält, die beschränkt wird? (hier hat er sich mit einem „nein“ zufriedengegeben und nicht weiter nachgefragt)

Was bedeutet Äquivalenz von Formeln in diesem Kontext? (N erfüllt Äquivalenz). Wie könnte man das syntaktisch aufschreiben? (Peano Axiome beweisen Äquivalenz).

Dann wollte er einen halbwegsformalen Beweis mit Peanoaxiomen für die Äquivalenzen der Sigma1 Formeln, die ich vorher aufgeschrieben habe. (er wollte eigentlich hauptsächlich die Induktion sehen und auch echt nur eine Beweisskizze.)

Danach Definition Ordinalzahl; Beweis warum das Maximum einer Menge von Ordinalzahlen der Vereinigung entspricht. Gibt es für jede Menge eine transitive Obermenge? (inkl. Beweis)

Dann wollte er wissen welche Axiome in den Universen  $H_0 := \{A: A \text{ hat endlichen transitiven Abschluss}\}$  und  $H_1 := \{A: A \text{ hat höchstens abzählbaren transitiven Abschluss}\}$ . Da sind wir wirklich alle Axiome durchgegangen und ich musste zeigen, dass  $H_0$  und  $H_1$  transitiv sind. Er wollte auch wissen bezüglich welcher Operationen diese Mengen abgeschlossen sind (vor allem welche Vereinigungen) und wie man die Elemente von  $H_0$  bzw.  $H_1$  charakterisieren kann ( $A \in H_0 \leftrightarrow A$  endlich und  $\forall a \in A: a \in H_0$ ;  $H_1$  gleich mit abzählbar). Dann wollte er wissen wie man  $H_1$  erweitern könnte damit das Potenzmengenaxiom gilt und welches Axiom man dadurch „verlieren“ würde. Bei diesem Thema hat er dann aber selber sehr viel über Kardinalität auf die Tafel geschrieben und mich eigentlich nicht mehr viel gefragt.

### Prüfung 4:

- Beweis von 'Zorn folgt (forall A unendlich : A gleichmächtig zu  $A \times A$  für A)'
- Beweis von '(forall A unendlich : A gleichmächtig zu  $A \times A$ ) folgt Wohlordnungssatz'
- Beweis von 'Vergleichbarkeitssatz v. mengen folgt Wohlordnungssatz'
- wo genau fließt die Vollständigkeit beim Beweis des Vollständigkeitssatzes ein
- Beweis (bzw. einen Algorithmus angeben), dass folgende aussagen Äquivalent sind: A sigma1 menge; part. char. Funk. berechenbar; A ist def. einer part. berechenbaren Funktion; A ist Bild einer totalen berechenbaren Funktion
- Beweis von '(A ist Bild einer totalen berechenbaren streng monotonen Funktion) folgt A entscheidbar'
- und zwischendurch wurden immer mal nach Definitionen gefragt bzw. gefragt warum die Definitionen gerade so ausschauen und nicht anders gegen ende hin hat er gemeint, dass wenn ich einen 1er will, muss er mir noch eine frage stellen; ich habe ihm darauf gesagt "ich rede eh so gerne mit Ihnen, also fragens mich noch was". dann hat er peinlich berührt gegrinst. jedenfalls hat die Prüfung starke 1,5 Stunden gedauert.

### Prüfung 5:

Meine Prüfung:

- Ist die Theorie  $\{\text{forall } x \ f(g(x))=x, \text{forall } x \ g(f(x))=x\}$  vollständig?
- Wenn man  $\exists n \geq 1$  hinzufügt?
- Wenn man  $\forall x \ f(x) \neq x$  hinzufügt?
- Wenn man hinzufügt, daß es keine  $n$ -Zyklen gibt? Im letzten Schritt ist es tatsächlich vollständig. Das zeigt man, indem man zeigt, daß alle überabzählbaren Modelle isomorph sind ("kategorisch über  $\omega_1$ "). Für jeden Schritt mußte ich immer Modelle konstruieren, die zeigen, dass die Theorie noch nicht vollständig ist
- Was ist eine  $\Sigma_1$ -Menge?
- Was für Äquivalenzen gibt es zu  $\Sigma_1$ -Mengen?
- Beweis der Äquivalenz mit  $\exists f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar mit  $\text{dom } f = A$
- Was ist der Vergleichbarkeitssatz von Wohlordnungen? Wie beweist man den?
- Zum Drüberstreuen ein bissi Kardinalzahl-Arithmetik.

### Prüfung 6:

1. Potenzmengenaxiom, ist das allgemeingültig? Wo gilt nicht? (Ein Modell halt aufschreiben)
2. Angenommen es wäre allgemeingültig, wie könnte man das zeigen? (Schritte der Prädikatenlogischen Resolution durchgehen)
3. "Geben Sie mir ein Beispiel für eine vollständige Theorie", da haben wir dann ewig herumgetan... Ich hab eine Sprache erfunden und mir mal ein paar geschlossene Formeln angeschaut und dann bissi herumgetan und mit seiner Hilfe bewiesen, dass die Theorie, die ich aufgeschrieben hab, vollständig ist. Dann wollt er, dass ich mir die Theorie anschau, die jedes  $\phi_n$  enthält, wobei  $\phi_n =$  "es gibt mindestens  $n$  Elemente". Dann haben wir erörtert, wie die Modelle ausschauen, die diese Theorie erfüllen und dass es halt mit dem Vollständigkeitsatz dafür ein abzählbares Modell gibt.

Am Schluss hat er dann gesagt, dass wir jetzt irgendeinen Satz mit isomorphen Modellen bewiesen haben.

Ich hab leider nicht auf die Uhr geschaut, aber es hat ca 45-60 Minuten gedauert.

Er hat immer wieder geholfen oder Tipps gegeben und die Benotung war auch ganz nett. Ganz am Anfang hat er gesagt: "Sie wollen einen 1er nehmen ich an." Und ich hab halt gesagt, dass das schon cool wär und dann hat er gesagt: Ok, dann überleg ich mir schwere Fragen. 😊

Aber keine Ahnung, ob er sonst was anderes gefragt hätte haha

### Prüfung 7:

Prüfungsbericht: PL Resolution (sehr genau: wieso sind die Formel und die skolemisierte erf. äquivalent) Allgemeine über Größe von Modellen wenn man eine erfüllbare Theorie hat (Theorie aus dem Vollständigkeitsatz Beweis).

Entscheidbarkeit/ semi entscheidbar Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen (beweis wollte er nicht)  $\Sigma_1$  Formeln (da war ich eher ahnungslos).

Er fragt dann irgendwann im Laufe der Prüfung welche Note man gerne hätte.. Darauf hab ich gesagt es ist meine letzte Prfg also positiv reicht mir.. und 15min später hat er gefragt wir könnten aufhören und Sie kriegen an 3er und das habe ich angenommen.

(dauer ca. 1 Stunde, davon 10 min auf Raumsuche/Raumwechsel.. dabei stoppt die Prüfung nicht – im Aufzug gehts weiter!)