Beispiel 164 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 12, 29.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06/2006

1 Angabe

Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = (\frac{8y}{y+1} - y - 1) \cdot y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

2 Theorie: Nichtlineare Differentialgleichungen - qualitative Methoden

- Betrachten Differentialgleichung 1. Ordnung ($y' = f(y)$), wobei es sich um nichtlineare Funktion handelt (f nicht von x abhängig, autonome DGL) - Bsp. ist logistisches Wachstum

$$y' = \mu \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{K})$$

- Wichtige Fragen

  1. **Gleichgewichtspunkte der DGL**?
     Gleichgewichtspunkt: $y' = f(y)$ wenn $f(y) = 0$ - $y = y^*$ ist eine konstante Lsg. der DGL
  2. **Verhalten der Lösungen der DGL in der Nähe des Gleichgewichtspunktes**
     - asymptotisch stabil: jede Lösung konvergiert zu einem Gleichgewicht y^*. Ein Gleichgewichtspunkt y^* iast asympotisch stabil, wenn $f'(y^*) < 0$ ist
     - instabil: mindestens eine Lösung verlässt die ε-Umgebung um y^* - $f'(y^*) > 0$
     - stabil: jede Lösung bleibt in der Nähe von y^*
  3. **Langzeitverhalten der Lösungen** Verhalten von $f(y)$ in (y, y')-Ebene betrachten

$$y' = f(y) \qquad \Leftarrow \qquad \text{Aenderungsverhalten } f(y) \begin{cases} > 0 & \text{wachsend} \\ = 0 & \text{stationaer} \\ < 0 & \text{fallend} \end{cases}$$

3 Lösung des Beispiels

$$y' = f(y) = (\frac{8y}{y+1} - y - 1) \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad f(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{8y}{y+1} - y - 1 = 0$$

Erster Gleichgewichtspunkt ist $y_1^* = 0$, betrachten nun Klammerausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{8y}{y+1} - y - 1 = 0 \qquad &| \cdot (y+1) \\ 8y - y \cdot (y+1) - 1 \cdot (y+1) &= 0 \\ 8y - y^2 - y - 1 &= 0 \\ y^2 - 6y + 1 &= 0 \\ y_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{8} \end{aligned}$$

Wir haben drei Gleichgewichtspunkte: $y_1^* = 0$, $y_2^* = 3 + \sqrt{8}$, $y_3^* = 3 - \sqrt{8}$
Betrachten nun Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtspunkte - benötigen Ableitung y':

$$\begin{aligned} f(y) &= (\frac{8y}{y+1} - y - 1) \cdot y = \frac{8y}{y+1} - y^2 - y \\ f'(y) &= \frac{16y^2 + 16y - 8y^2}{(y+1)^2} - 2y - 1 \\ f'(y) &= \frac{8y^2 + 16y}{(y+1)^2} - 2y - 1 \end{aligned}$$

Setzen Gleichgewichtspunkte in y ein:

- $f'(y_1^*) < 0$ - asymptotisch stabil
- $f'(y_2^*) < 0$ - asymptotisch stabil
- $f'(y_3^*) > 0$ - instabil