Metrische Räume

Für $x, y \in \mathbb{R}$, setzte $d(x, y) := |x - y|$. d ist ein "Abstand" oder "Metrik":

Definition

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X, wenn gilt: $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ gdw. $x = y$; und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Andere Beispiele für Abstände:

- In $\mathbb{R}^2$ die "Euklidische Metrik" $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Analog für $\mathbb{R}^3$: $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- (Bem.: Auch in $\mathbb{R}$ gilt: $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$.)
- Allgemeiner: V normierter Vektorraum. Dann ist $d(\vec{x}, \vec{y}) := ||\vec{y} - \vec{x}||$ ein Abstand.

Eine "Grundmenge" X zusammen mit einem Abstand $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nennt man "metrischen Raum".

Offene Mengen 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, setze
$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ (genannt "Ball").

In $\mathbb{R}$ ist $B_\varepsilon(x)$ das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.
In $\mathbb{R}^2$ ist $B_\varepsilon(\vec{x})$ die randlose Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\vec{x}$ und Radius ε.
Analog: In $\mathbb{R}^3$ Kugel.

Definition

$A \subseteq X$ heißt offen, wenn $(\forall x \in A)\,(\exists \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

(Insbesondere: $\emptyset$ ist offen.)

Intuitiv: Eine Menge ist offen wenn sie "keinen Rand" hat.

Offene Mengen 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Theorem

1. *Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist offen.*
2. *A offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung von Bällen.*

Beweis: Ü. Für (1) benötigt man Dreiecksungleichung.)

Theorem (Topologie. Bew.:Ü)

A. *$\emptyset$ ist offen, X ist offen.*
B. *Der Schnitt zweier (oder: endlich vieler) offener Mengen ist offen.*
C. *Die ("beliebige") Vereinigung offenener Mengen ist offen.*

Bemerkung: Wenn man zu einer Grundmenge X (i.A. ohne Metrik) einige Teilmengen als "offen" deklariert, s.d. (A–C) erfüllt sind, nennt man das einen "topologischen Raum". Jeder metrische Raum ist topologisch.

Abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Intuitiv: Der Rand ist bei der Menge A dabei.

$\{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. (Wieder Dreiecksungleichung.)

Durch Komplementbildung zu offenen Mengen sieht man sofort:

Theorem

- *$\emptyset$ und X sind also abgeschlossen (und auch offen).*
- *Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- *Der beliebige Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Offen/abgeschlossen und Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus X.
Wir sagen "a_n konvergiert mit Limes a", oder: "$\lim_{n\to\infty} a_n = a$", wenn gilt:
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n > m)\, d(a_n, a) < \varepsilon$.

(Überzeugen Sie sich dass das für $X = \mathbb{R}$ die alte Definition ergibt!)

Theorem

1. *$O \subseteq X$ ist offen, gdw gilt: Für jede konvergierende Folge a_n gilt*
   $\lim_{n\to\infty} a_n \in O \;\rightarrow\; (\exists M)\,(\forall n > M)\, a_n \in O$
2. *A ist abgeschlossen, gdw gilt: Für jede konvergierende Folge a_n gilt*
   $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\&\; (\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \in A\right) \rightarrow a \in A$
   D.h. eine konvergente Folge mit Elementen aus A hat Limes in A.

Ein Beweis

(X, d) metrischer Raum, $O \subseteq X$.

Zu zeigen:

$$O \text{ offen} \Leftrightarrow \Big(\text{Für jede konvergierende Folge } a_n \text{ gilt:} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \in O \;\rightarrow\; (\exists M)\,(\forall n > M)\, a_n \in O \Big)$$

($\Leftrightarrow$ heißt genau dasselbe wie $\leftrightarrow$, nämlich gdw.)

Beweis: $\Rightarrow$: O ist also offen, und $a := \lim a_n$ ist in O. Nach Def. offen gibt es $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(a) \subseteq O$. Nach Def. Limes $(\exists M)\,(\forall n > M)\, d(a_n, a) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen: Wenn O nicht offen, dann gibt es eine Folge a_n die ein Gegenbeispiel ist.
O nicht offen, also (nach Def.) $(\exists a \in O)\,(\forall \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon(a) \not\subseteq O$; d.h. $(\exists a \in O)\,(\forall \varepsilon > 0)\, \exists b_\varepsilon \in B_\varepsilon(a) \setminus O$. Setze $a_n := b_{\frac{1}{n}}$. Dann konvergiert a_n gegen $a \in O$, weil $d(a_n, a) = d(b_{\frac{1}{n}}, a) < \frac{1}{n}$, aber kein a_n ist in O.

Offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ gilt:

- Offenene Intervalle (a, b) sowie $(-\infty, a)$ und (a, ∞) sind offen.
- Abgeschlossenes Intervalle $[a, b]$ sowie $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ sind abgeschlossen.
- Halboffene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.
- Bälle sind genau die offenen Intervalle:
  $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und $(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$.
- $A \subseteq \mathbb{R}$ offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung offener Intervalle.

Theorem ($\mathbb{R}^n$ "zusammenhängend". Ohne Beweis)

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt: $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. [Das inkludiert $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.]

(Bemerkung: Das gilt nicht in jedem metr. Raum. Bsp: Jede TM von metr. Raum ist wieder metr. Raum; Insbes $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ mit $d(x, y) := |y - x|$ ist metr. Raum, $[0, 1]$ ist offen und abgeschlossen.)

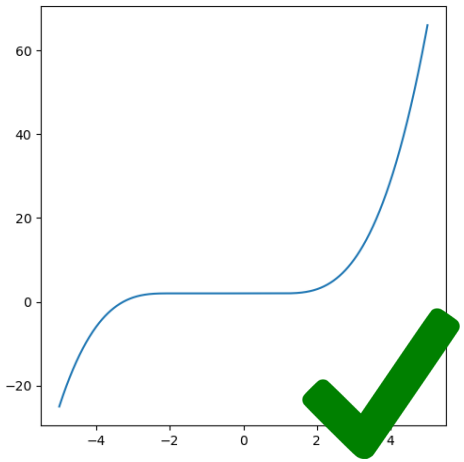
Funktionen

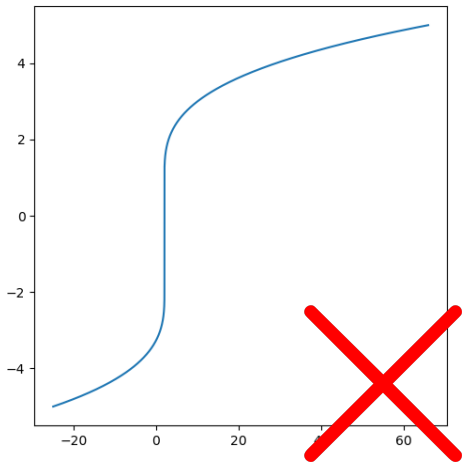
Funktionen: Notation

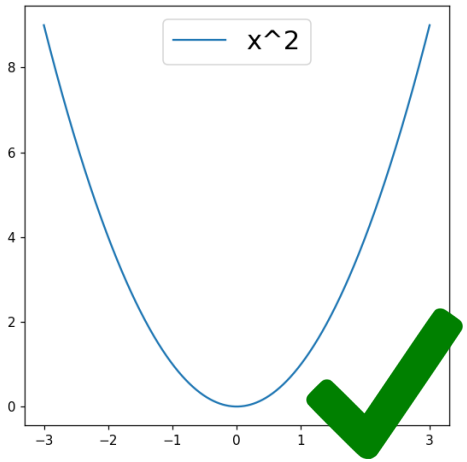
- Eine Funktion $f : A \to B$ ordnet jedem "input" aus der Menge A (Definitionsbereich) genau einen "output" aus B (Wertebereich) zu.
- Bsp: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Das entspricht einer Folge $(f(0), f(1), \dots)$.
- Notation zur Definition/Beschreibung von Funktionen:
  Bsp für Quadrat-Funktion:
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:, "$x \mapsto x^2$"; oder: "so daß $f(x) = x^2$" oder: "definiert durch" oder: "mit". Schlampig auch "Funktion $\frac{1}{x}$" oder "$f = \frac{1}{x}$".
- Definitionsbereiche oft implizit (=nicht explizit ausgesprochen): Wenn wir von der (reellen) Funktion $\frac{1}{x}$ sprechen, meinen wir implizit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
- "Zwei inputs": $f(x, y)$ äquivalent zu einem Input "geordnetes Paar (x, y)"; d.h. $f : X \times Y \to Z$.
  Analog $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ für $f(x_1, \dots, x_n)$.
  Bsp: $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x + y$ ist die Addition.

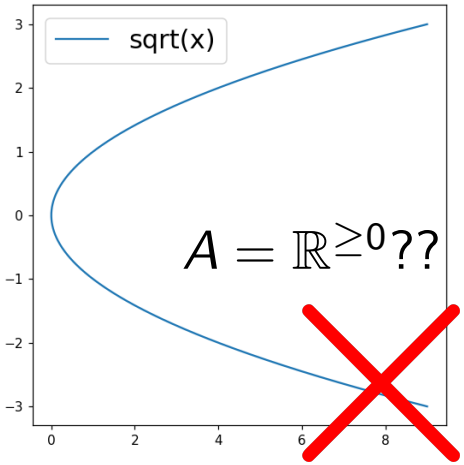
Graphen

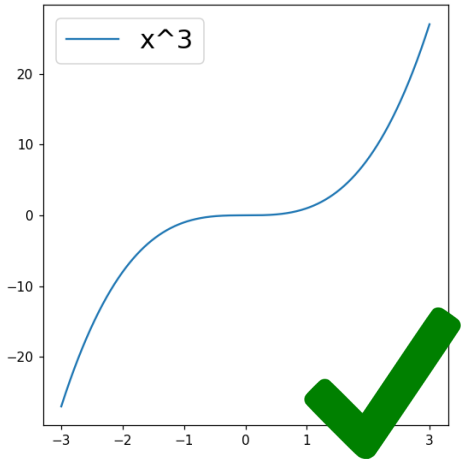
Identifiziere $f : A \to \mathbb{R}$ mit Funktionsgraphen $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R}$.
Nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist ein Graph!

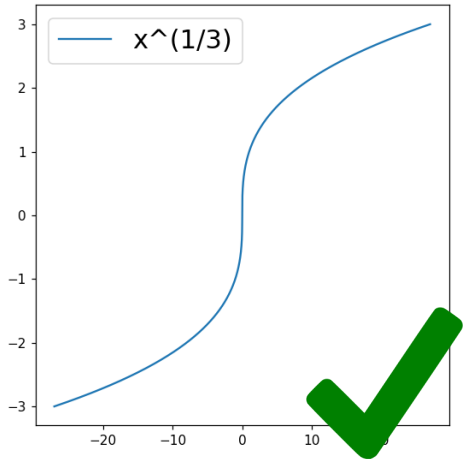






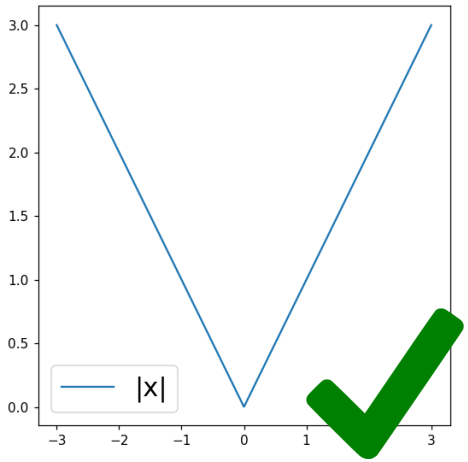


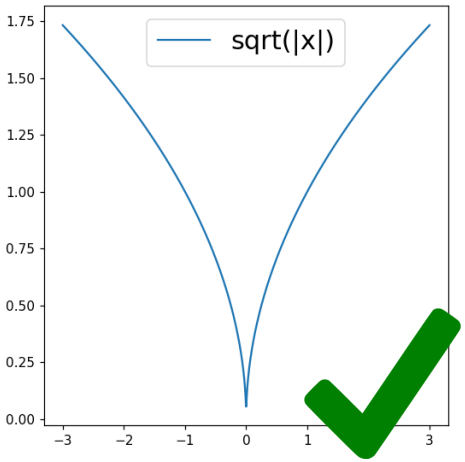


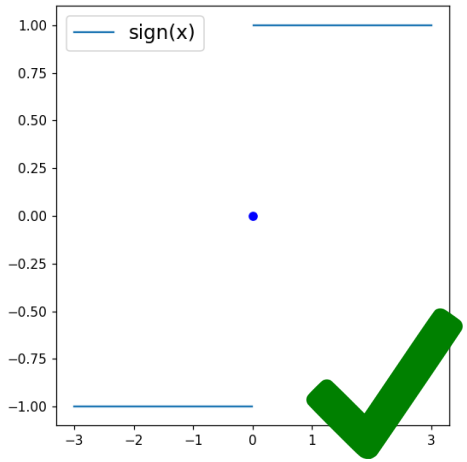


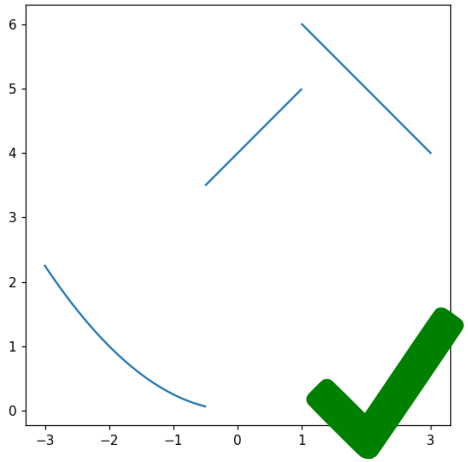
Graphen

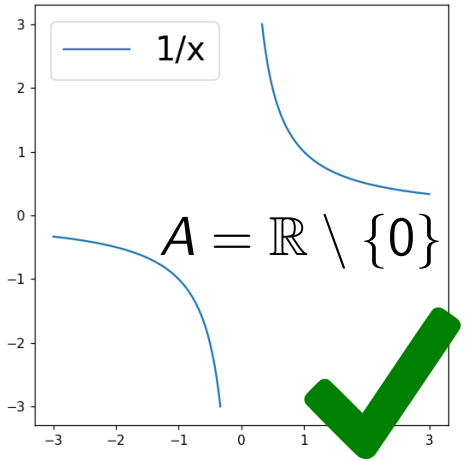
Identifiziere $f : A \to \mathbb{R}$ mit Funktionsgraphen $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R}$.
Nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist ein Graph!











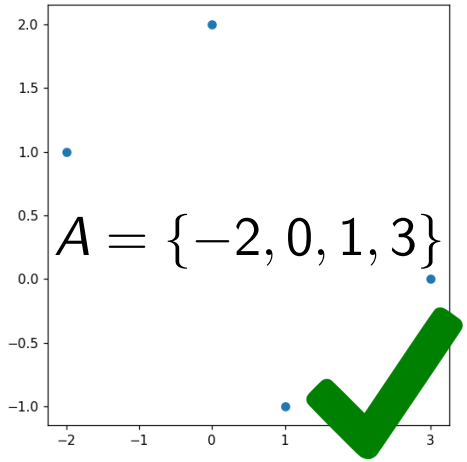


Bild und Urbild

Sei $f : A \to B$. Wir definieren:
$\mathbb{R}^{>0} := (0, \infty)$ (positive reelle Zahlen), $\mathbb{R}^{\geq 0} := [0, \infty)$ (nicht-negative).

- Für $X \subseteq A$ ist $f''X := \{f(x) : x \in X\}$. ("Bild", "image")
  (Manchmal auch $f[X]$ geschrieben.)
  Bsp: Für $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f''\mathbb{R}^{>0} = \mathbb{R}^{>0}$. Bsp: $\ln''\mathbb{R}^{>0} = \mathbb{R}$.
- Für $Y \subseteq B$ ist $f^{-1}Y := \{a \in A : f(a) \in Y\}$. ("Urbild", "inverse image")
  Für $b \in B$ schreibe auch $f^{-1}(b)$ statt $f^{-1}\{b\}$,
  d.h. $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$.
  Bsp: $\sin^{-1}(0) = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$.
- Urbilder vertragen sich gut mit Mengenoperationen:
  $f^{-1}(X_1 \cup X_2) = (f^{-1}X_1) \cup (f^{-1}X_2)$
  und dasselbe gilt für $\cap$ und $\setminus$, (insbesondere Komplement $A \setminus X$).
- Bei Bildern gilt nur für $\cup$: $f''(X_1 \cup X_2) = (f''X_1) \cup (f''X_2)$; aber nicht für $\cap$ oder Komplement. Nur: $f''(X_1 \cap X_2) \subseteq (f''X_1) \cup (f''X_2)$!