(1) [10 Punkte] Wir interessieren uns für den unendlichen Kettenbruch

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}.$$

Zu diesem Zwecke studieren wir die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}, \quad \text{für } n \geq 0, \quad \text{und Startwert} \quad a_0 = 0.$$

(a) Man formuliere allgemein den **Hauptsatz über monotone Folgen** für die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Man beweise, dass die oben definierte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ **beschränkt** ist, wobei explizit Schranken C_1, C_2 angegeben werden sollen und $C_1 \leq a_n \leq C_2$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden soll.

(c) Man beweise, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ **monoton wachsend** ist.

(d) Man begründe nun, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert und man bestimme weiters den **Grenzwert** $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ durch Anwenden der Rechenregeln für Grenzwerte auf die angegebene Rekursion.

(2) [10 Punkte] Eine ebene Kurve ist implizit gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y) = (2x + y)^2 - 4x + 6y + 9 = 0.$$

(a) Durch **implizites Differenzieren** bestimme man die Ableitung $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

(b) Man ermittle den eindeutig bestimmten Punkt P_0 auf der Kurve an dem die **Tangente horizontal** verläuft.

(c) Man ermittle den eindeutig bestimmten Punkt P_1 auf der Kurve mit **Steigung der Tangente** -1 und gebe weiters die Gleichung der Tangente t an diesem Punkt an.

(d) Man ermittle den eindeutig bestimmten Punkt P_2 auf der Kurve für den der **Hauptsatz über implizite Funktionen nicht anwendbar** ist.

(3) [10 Punkte]

(a) Man gebe eine mathematisch exakte Definition, wann eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ **differenzierbar** ist. Weiters erläutere man, in welchem **Zusammenhang** die Begriffe **Stetigkeit und Differenzierbarkeit** für reelle Funktionen in einer Variablen stehen, insbesondere ob es differenzierbare Funktionen $f(x)$, die nicht stetig sind, gibt bzw. ob es stetige Funktionen $f(x)$, die nicht differenzierbar sind, gibt.

(b) Man formuliere den **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** für differenzierbare Funktionen (Voraussetzungen, Aussage!) und veranschauliche den Sachverhalt in einer Skizze.

(c) Wenn für zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bekannt ist, dass $\boldsymbol{f'(x) = g'(x)}$, für alle $x \in \mathbb{R}$, in welchem Zusammenhang stehen dann die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$?

(d) Man formuliere den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** (Voraussetzungen, Aussagen!), welcher Zusammenhänge zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral herstellt.

(4) [10 Punkte = 2 · Anzahl korrekter Antworten in Tabelle]

Man finde Antworten auf die folgenden kürzeren Aufgaben und trage diese anschließend in die Tabelle ein. Es werden für die Bewertung ausschließlich die in die Tabelle eingetragenen Werte herangezogen, Nebenüberlegungen und Rechnungen können selbstverständlich separat auf den Angabeblättern durchgeführt werden, gehen aber nicht in die Beurteilung ein! Für jede korrekte Antwort in der Tabelle gibt es zwei Punkte; es werden für inkorrekte Antworten KEINE Punkte abgezogen.

Aufgabe	Antwort
Man bestimme den **Konvergenzradius** R für die angegebene Potenzreihe: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n.$$	$\in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$
Man bestimme den **Grenzwert** der folgenden **unbestimmten Form**: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}.$$	$\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Man berechne das folgende **uneigentliche Integral** (e bezeichnet die Eulersche Zahl): $$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)}.$$	$\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Man bestimme die **lineare Approximation**, also das **Taylor-Polynom** $T_1(x)$ erster Ordnung, für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.	$\in \mathbb{R}[x]$
Man bestimme den folgenden **Grenzwert** (= parabolische Annäherung) für die **bivariate Funktion** $$h(x,y) = \frac{xy^2}{2x^2 + y^4}: \qquad \lim_{t \to 0} h(t^2, t).$$	$\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$