1. Stufler Analysis-Klausur vom 31.1.2024

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte und beweisen Sie Ihre Behauptung für a)-d):
   (a)
   $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n}$$
   (b)
   $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n}$$
   (c)
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{42n}{\ln(n)}$$
   (d)
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(\frac{1}{n}\sin(n))-1}{\frac{1}{n}\sin(n)}$$
   (e) Sei $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektiv. Zeigen Sie, dass wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen für $n\to\infty$ gegen a konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$. Was ist der Grenzwert von $b_n \to \infty$?

   Hinweis: Aus der Vorlesung bekannte Grenzwerte müssen in a)-d) nicht bewiesen werden, Abwandlungen müssen aber begründet werden.

2. Sei $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, f(x) := \ln(x)$. Finden Sie eine Formel für die n-te Ableitung von $f, n\in\mathbb{N}$ und beweisen Sie diese mit einem Induktionsbeweis.

3. (a) Berechnen Sie das folgende Integral für $c\in\mathbb{R}^+$.
   $$42\int_c^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$
   (b) Konvergiert die folgende Reihe?
   $$42\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

4. Für die Funktion $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$
   $$f(x,y) := 42\frac{x-y}{x+y}$$
   berechnen Sie die Taylorreihenentwicklung von f im Punkt (1,1) bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

5. Überprüfen Sie die folgende Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit.
   $$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{für } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$