

13

Gravitation

13.1 Das Gravitationsgesetz

13.1.1 Einleitende Bemerkungen

Im Jahre 1687 publizierte Newton in seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre“ das nach ihm benannte Gravitationsgesetz, das die Kraft angibt, die zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r aufeinander ausüben. Es lautet in moderner Schreibweise:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (13.1)$$

Die Gravitationskonstante γ konnte Newton selbst noch nicht angeben. Allein die Proportionalitäten $F \sim m_i$ und $F \sim 1/r^2$ genügten zur Erklärung der von Kepler empirisch gewonnenen Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegungen. Und das war ein großer Triumph. Wir wollen kurz skizzieren, wie Newton zu seinem Gesetz kam.

Aus irdischen Beobachtungen war bekannt, daß die Erde Körper mit einer Kraft anzieht, die deren Masse proportional ist: $F = m \cdot g$. Newton schloß, daß dann auch diese Körper umgekehrt die Erde mit der gleichen Kraft anziehen müßten (actio = reactio), so daß man mit M_E als Erdmasse unmittelbar schreiben kann

$$F \sim m \cdot M_E \quad \text{oder allgemein} \quad F \sim m_1 \cdot m_2. \quad (13.2)$$

Außerdem muß diese Kraft mit wachsendem Abstand r zwischen den beteiligten Körpern abnehmen, etwa nach einem Potenzgesetz: $\sim 1/r^n$. Der Ansatz für das Gesetz war also $F \sim m_1 m_2 / r^n$ und es ging darum, den Exponenten n zu bestimmen. Dazu verglich Newton die Anziehung, die ein Körper (K) an der Erdoberfläche erfährt, mit der, die der Mond (M) auf seiner Bahn durch die Erdanziehung erfahren muß. Er schrieb diese beiden Kräfte auf:

$$F_K = \gamma \cdot \frac{M_E \cdot m_K}{r_K^n} = m_K \cdot g \quad \text{und} \quad F_M = \gamma \cdot \frac{M_E \cdot m_M}{r_M^n} = m_M \cdot a \quad (13.3)$$

Die Beschleunigung g , die der Körper an der Erdoberfläche erfährt, ist $9,81 \text{ m/s}^2$; die Beschleunigung a , die der Mond auf seiner Umlaufbahn erfährt, kann man aus seinem Bahnradius ($r_M \approx 60$ Erdradien) und seiner Umlaufzeit (≈ 28 Tage) ausrechnen – sie war also auch bekannt: $a = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Es blieb nur die Frage, welcher Abstand r_K des Körpers an der Erdoberfläche von der Erde einzusetzen ist. Newton setzte versuchsweise für r_K den Erdradius R_E ein und erhielt aus dem Verhältnis der Beschleunigungen

$$\frac{g}{a} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2} = 3773.$$

Dieses Verhältnis ist nach (13.3) ausschließlich durch die Bahnradien der beiden Körper bestimmt:

$$\frac{r_M^n}{r_K^n} = \left[\frac{60 R_E}{R_E} \right]^n = 60^n. \quad (13.4)$$

Der Vergleich der Zahlen ergibt ziemlich exakt $n = 2$. Alle Berechnungen von Planetenbahnen und von Bahnen anderer Himmelskörper zeigten dann, daß der Wert 2 des Exponenten wirklich mit höchster Genauigkeit gilt.

13.1.2 Die Gravitationskonstante

Der Wert der Gravitationskonstanten γ läßt sich aus astronomischen Beobachtungen nicht gewinnen. Newton blieb nur eine Abschätzung, indem er die Erdmasse aus ihrem Volumen und einer vermuteten mittleren Massendichte $\rho \approx 5 \text{ g/cm}^3$ berechnete. Die Messung von γ muß im Labor erfolgen. Sie gelang Cavendish¹ erst 1797 mit einer sehr empfindlichen Torsionswaage. Das Prinzip der Apparatur sieht man in Fig. 13.1. Zwei kleine kugelförmige Körper mit den Massen m sind an einem dünnen („masselosen“) Stab und dieser an einem Torsionsdraht T befestigt. Ihnen stehen zwei schwere Bleikugeln (M) in der Stellung (1-2) gegenüber. Die Gravitationskräfte zwischen den kleinen und den großen Kugeln führen zu einem Drehmoment, das den Draht verdreht. Der Verdrehungswinkel ist allerdings sehr klein; nur ein großer Lichtzeiger (Reflexion am Spiegel S) erlaubt überhaupt erst seinen Nachweis. Man erhält auf diese Weise für die Gravitationskonstante den Wert

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0004) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2.$$

Mit diesem Wert ist nun aber auch eine exakte Bestimmung der Erdmasse M_E möglich, wenn man den aus Pendelexperimenten bekannten Wert der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und den Erdradius $R_E = 6370 \text{ km}$ einsetzt:

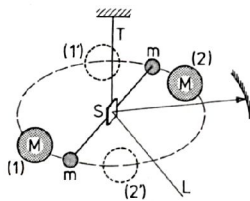


Fig. 13.1: Schema einer Gravitationswaage: Zwei kleine Körper (m) werden von zwei großen Bleikörpern (M), die sich einmal in der Stellung (1)-2) und einmal in der Stellung (1')-2') befinden, angezogen. Die Verdrehung des Torsionsdrahtes T wird über den Spiegel S mit einem großen Lichtzeiger L gemessen.

¹ Henry Cavendish 1731–1810

$$F = mg \quad \text{und} \quad F = \gamma \cdot \frac{M_E \cdot m}{R_E^2} \quad \text{f\u00fchren zu} \quad g = \gamma \cdot \frac{M_E}{R_E^2} \quad (13.5)$$

oder

$$M_E = \frac{g}{\gamma} \cdot R_E^2 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg.} \quad (13.6)$$

Die Genauigkeit dieses Wertes ist nat\u00fcrlich wesentlich durch die Genauigkeit von γ bestimmt (etwa Promille). Bei der Schwerebeschleunigung g und dem Erdradius R_E k\u00f6nnen nur Mittelwerte eingesetzt werden, denn bekanntlich ist die Erde gar keine Kugel, sondern etwa ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, das au\u00dferdem noch rotiert. g l\u00e4\u00dft sich sehr genau aus der Schwingungsdauer von Pendeln bestimmen.

13.2 Die Gravitationsfeldst\u00e4rke

Wir bleiben weiter bei der Erde als Beispiel. Um die Schreibarbeit zu verringern, lassen wir den Index E aber weg. Die Erdmasse sei also M , der Erdradius sei R . Wir stellen fest, da\u00df ein Probek\u00f6rper mit der Masse m an jedem Punkt des Raumes au\u00dferhalb der Erde eine Kraft erf\u00e4hrt, die auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet ist und die nach au\u00dfen hin mit dem inversen Quadrat des Abstands r vom Mittelpunkt der Erde abnimmt. Vektoriell geschrieben nimmt das Gravitationsgesetz folgende Form an:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot m \cdot \hat{r}. \quad (13.7)$$

\hat{r} ist ein Einheitsvektor, der vom Erdmittelpunkt zum Probek\u00f6rper hin zeigt. Markieren wir die Kraft \vec{F} in jedem Raumpunkt mit einem Pfeil, erhalten wir ein Bild des *Kraftfelds* der Erde (Fig. 13.2a). Wir stellen uns vor, da\u00df der Raum durch das Vorhandensein der Erde ver\u00e4ndert wird und dieses Kraftfeld vorhanden ist, auch wenn man es nicht durch einen Probek\u00f6rper nachweist. Es liegt daher nahe, den Probek\u00f6rper aus (13.7) durch Division durch m zu eliminieren. Man gelangt auf diese Weise zur Gravitationsfeldst\u00e4rke.

$\text{Gravitationsfeldst\u00e4rke} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse des Probek\u00f6rpers}}$ $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \hat{r}; \quad \text{Einheit: m/s}^2. \quad (13.8)$
--

Die Gravitationsfeldst\u00e4rke besitzt die Einheit einer Beschleunigung, die gleiche Abstandsabh\u00e4ngigkeit wie \vec{F} und nat\u00fcrlich auch das gleiche Feldbild. \u00dcblicherweise zeichnet man bei derartigen Vektorfeldern nicht wie in Fig. 13.2a viele einzelne Kraft- oder Beschleunigungsvektoren, sondern verbindet sie durch Linien, an denen man die Richtung der Feldvektoren markiert. Die r\u00e4umliche Dichte der Feldlinien wird dann als Ma\u00df f\u00fcr die St\u00e4rke des Feldes verwendet (Fig. 13.2b).

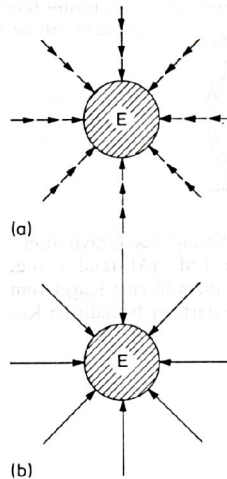


Fig. 13.2: Darstellung des Kraftfelds der Erde: (a) durch Angabe der Kraftvektoren, (b) durch Angabe der Kraftfeldlinien.

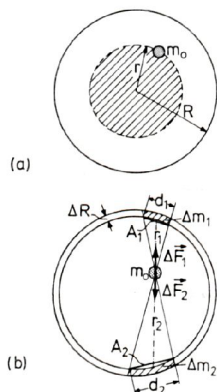


Fig. 13.3: Zur Berechnung des Gravitationsfeldes im Innern der Erde (Abstand r vom Erdmittelpunkt) wird diese in eine Kugel vom Radius r (a) und eine darüber befindliche Kugelschale zerlegt (b).

Im Gravitationsgesetz kommt der Erdradius R interessanterweise nicht vor. Die Masse der Erde könnte auch auf den Schwerpunkt konzentriert gedacht werden – die Kraftwirkungen außerhalb der Erde wären dieselben. Das Gesetz gilt im gesamten Außenraum bis unmittelbar an die Erdoberfläche heran. Das läßt sich durch eine recht längliche Integration für kugelförmige Körper direkt zeigen, was wir hier aber nicht durchführen wollen. – An der Erdoberfläche herrscht also die Gravitationsfeldstärke $g = a(R) = \gamma \cdot M/R^2 = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Wie ändert sich nun die Kraft auf einen Probekörper m für $r < R$, wenn man mit ihm z.B. in einen tiefen senkrechten Schacht hinabsteigt? Dann gelten die obigen Betrachtungen immer noch für den inneren, in Fig. 13.3a schraffierten Teil der Erdkugel mit der Masse²

$$M_i = M \cdot \frac{V_i}{V} = M \cdot \frac{r^3}{R^3} = M \cdot (r/R)^3.$$

Von diesem hat man also eine Anziehungskraft von

$$F_i = \gamma \cdot \frac{M_i \cdot m}{r^2} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R^3} \cdot r. \tag{13.9}$$

Die darüber befindliche Kugelschale mit der Dicke $R - r$ übt kurioserweise überhaupt keine Kraftwirkung auf den Probekörper aus.

Das erkennt man ohne Rechnung, wenn man die dicke Kugelschale in Gedanken in lauter dünne konzentrische Kugelschalen mit der Dicke ΔR zerlegt (Fig. 13.3b). Betrachten Sie z.B. den durch den Probekörper gelegten Doppelkegel. Er soll einen infinitesimal kleinen Öffnungswinkel besitzen und ist hier nur der Deutlichkeit halber sehr groß gezeichnet. Dieser Doppelkegel schneidet aus der Kugelschale die Massenelemente Δm_1 und Δm_2 heraus. Man sieht unmittelbar, daß sich deren Kraftwirkungen auf m gerade aufheben, $\Delta \vec{F}_1 = -\Delta \vec{F}_2$. Der Strahlensatz sagt nämlich, daß sich die Durchmesser d_1 und d_2 der Grundkreisflächen wie die Abstände r_1 und r_2 verhalten, die Grundkreisflächen A_1 und A_2 selbst also wie deren Quadrate.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}.$$

Mit der Materiedichte ρ ergibt sich

$$\Delta F_1 = \gamma \cdot \frac{m \cdot \Delta m_1}{r_1^2} = \gamma \cdot \frac{m \rho \Delta R A_1}{r_1^2}$$

und

$$\Delta F_2 = \gamma \cdot \frac{m \cdot \Delta m_2}{r_2^2} = \gamma \cdot \frac{m \rho \Delta R A_2}{r_2^2}.$$

Die beiden Kräfte ΔF_1 und ΔF_2 sind offenbar gleich – wie oben behauptet.

Gilt dies aber für den einen herausgegriffenen Doppelkegel, dann gilt es auch für alle anderen, die man sich durch m gelegt denken kann. Also übt die gesamte dünne Kugelschale keine Kraft auf den Probekörper m aus, gleichgültig welchen Radius sie besitzt, denn der Radius tritt in der Rechnung gar nicht auf. Dann kann aber auch eine dicke Kugelschale keine Kraft ausüben, denn die kann ja in lauter dünne Schalen zerlegt werden.

² Diese Gleichung gilt natürlich nur, wenn man die Dichte als konstant annimmt.

Es ergeben sich also zusammenfassend mit M als Erdmasse, R als Erdradius und r als Mittelpunktsabstand Erde – Probekörper die folgenden Kraft- bzw. Gravitationsfeld-Gesetze:

$$\begin{aligned} r < R: \quad F_i &= \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R^3} \cdot r; \quad a_i = \gamma \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r = g \cdot \frac{r}{R}; \\ r > R: \quad F_a &= \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}; \quad a_a = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = g \cdot \frac{R^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Im Innern eines kugelförmigen Körpers nimmt die Gravitationsfeldstärke proportional zum Abstand vom Mittelpunkt zu. Im Äußeren nimmt sie umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt ab.

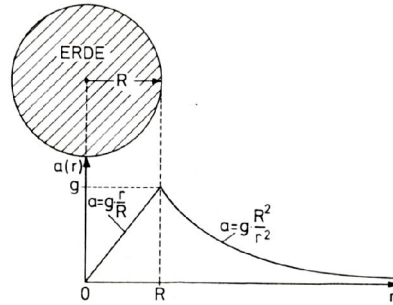


Fig. 13.4: Abhängigkeit der Gravitationsfeldstärke a vom Abstand vom Erdmittelpunkt: zunehmend proportional r im Innern, abnehmend umgekehrt proportional r^2 im Äußeren. R ist der Erdradius.

13.3 Potentielle Energie und Gravitationspotential

In kleinen Raumbereichen in der Nähe der Erdoberfläche ist die Gravitationsfeldstärke konstant und gleich $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Die Feldlinien verlaufen parallel und stehen auf der Erdoberfläche senkrecht. Das Feld ist dann in guter Näherung homogen. In ihm hatte man einem Körper mit der Masse m in der Höhe h über dem Erdboden im Kap. 5 eine potentielle Energie

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (13.11)$$

zuordnen können, wobei der Energienullpunkt willkürlich auf $h = 0$ gelegt worden war. Dieser Begriff soll jetzt erweitert werden.

Gl. (13.11) wurde durch Berechnung der Arbeit gewonnen, die aufzuwenden war, um den Körper gegen die konstante Kraft $\vec{F} = m\vec{g}$ auf die Höhe h zu heben. Jetzt hat man für diese Kraft

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (13.12)$$

einzusetzen. Man fragt nach der Arbeit, die aufzuwenden ist, um den Körper m gegen diese Kraft an den Ort \vec{r} zu transportieren; der Ortsvektor \vec{r} ist auf den Erdmittelpunkt bezogen. Als Ausgangspunkt des Transports wählt man üblicherweise nicht die Erdoberfläche, sondern $r = \infty$. Der Körper wird am besten längs einer Feldlinie zum gewünschten Ort \vec{r} gebracht. Das Arbeitsintegral ist dann nämlich einfach auswertbar:

$$W = - \int \vec{F} d\vec{r} = \gamma m M \cdot \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \gamma m M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -\gamma \frac{mM}{r}. \quad (13.13)$$

Die Arbeit $-\gamma m M / r$ ist aufzuwenden, d. h. man gewinnt die Arbeit $+\gamma m M / r$.

Man hat also die

Potentielle Energie eines Körpers mit der Masse m im Schwerefeld der Erde

$$E_p(r) = -\gamma \cdot \frac{mM}{r}, \quad (r > R). \quad (13.14)$$

Die Fortsetzung ins Erdinnere ergibt sich, wenn man F_i aus (13.10) in das Arbeitsintegral einsetzt und berücksichtigt, daß man den Wert der potentiellen Energie an der Erdoberfläche mit (13.14) bereits kennt:

$$\begin{aligned} E_p(r \leq R) &= E_p(R) + \left\{ - \int_R^r \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right\} = -\gamma \cdot \frac{mM}{R} + \gamma \cdot \frac{mM}{R^3} \cdot \int_R^r r \, dr \\ &= -\gamma \cdot \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} \gamma \frac{mM r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \end{aligned}$$

Potentielle Energie eines Körpers mit der Masse m im Erdinnern

$$E_p(r) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \frac{mM}{R} \left(-3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (r \leq R). \quad (13.15)$$

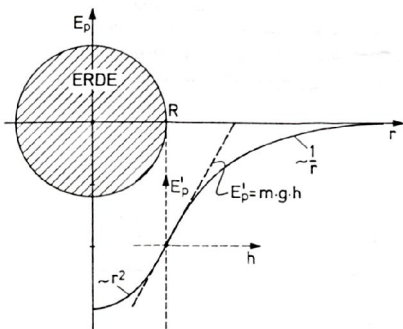


Fig. 13.5: Radialabhängigkeit der potentiellen Energie, deren Nullpunkt üblicherweise auf $r = \infty$ gelegt wird. Im Erdinnern wächst die potentielle Energie proportional r^2 , im Äußeren proportional $1/r$.

In Fig. 13.5 ist die Ortsabhängigkeit der potentiellen Energie aufgezeichnet: Der Energienullpunkt liegt bei $r = \infty$. Wenn man von außen kommt, nimmt sie zunächst wie $1/r$ ab, um dann im Erdinnern in einen quadratischen Verlauf überzugehen. Schließlich landet man im Erdmittelpunkt bei $E_p = -(3/2)\gamma mM/R$.

Die bekannte Beziehung $E_p = mgh$ für die potentielle Energie eines Körpers gewinnt man, wenn man (13.14) oder (13.15) für die Umgebung der Erdoberfläche, also für $r \approx R$ entwickelt. Dort gilt nämlich näherungsweise:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1+h/R} \approx \frac{1}{R} \cdot \left(1 - \frac{h}{R} \right). \quad (13.16)$$

Das wird in (13.14) eingesetzt:

$$E_p(r) \approx -\gamma \cdot \frac{mM}{R} + \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{=g} \cdot m \cdot h. \quad (13.17)$$

Man erhält einen konstanten Term und das gewünschte mgh . Wenn schließlich wie früher der Energienullpunkt auf die Erdoberfläche verlegt wird, bleibt:

$$E_p(h) = E_p(r) - E_p(R) = E_p(r) + \gamma \cdot \frac{mM}{R} = mgh. \quad (13.18)$$

Auch diese Näherung ist in Fig. 13.5 als gestrichelte Gerade eingezeichnet.

Man kann die Beziehungen (13.14) und (13.15) wieder von den speziellen Eigenschaften des Probekörpers befreien, wenn man durch dessen Masse m dividiert. Auf diese Weise kommt man zum *Gravitationspotential* Φ der Erde.

$$\text{Gravitationspotential} = \frac{\text{potentielle Energie}}{\text{Masse des Probekörpers}}$$

$$\Phi = \frac{E_p}{m} \quad (\text{Einheit: J/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2)$$

$$\Phi_i(r) = -\frac{\gamma M}{2R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (r \leq R) \quad (13.19)$$

$$\Phi_a(r) = -\frac{\gamma M}{r}, \quad (r > R) \quad (13.20)$$

Die Flächen konstanten Potentials nennt man *Äquipotentialflächen*. Hier sind es konzentrische Kugelflächen um den Erdmittelpunkt. Mit den Äquipotentialflächen hat man eine einfache, zweckmäßige geometrische Darstellung des Potentialfeldes der Erde gefunden. Man hat es hier mit einem skalaren Feld zu tun, das mathematisch leichter handhabbar ist als das vektorielle Gravitationsfeld, aber die Gravitation in gleicher Weise beschreibt.

13.4 Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung

13.4.1 Formulierung der Gesetze

Basierend auf den Ideen des Kopernikus³ und den umfangreichen astronomischen Beobachtungsdaten seines Lehrers Tycho Brahe⁴ formulierte Johannes Kepler⁵ – entgegen der Überzeugung und Lehrmeinung seiner Zeit – 1609 die ersten beiden und 1621 das dritte seiner Gesetze.

- I. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- II. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen („konstante Flächengeschwindigkeit“).
- III. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen.

Die „theoretische Erklärung“ dieser Gesetze lieferte Newton 70 Jahre später mit seinem Gravitationsgesetz, jedoch nicht wie bei einem mathematischen Beweis, indem er die Ellipsenbahnen aus dem $1/r^2$ -Gesetz ableitete, sondern

³ Nikolaus Kopernikus 1473–1543

⁴ Tycho Brahe 1546–1601

⁵ Johannes Kepler 1571–1630

indem er umgekehrt zeigte, daß die Ellipsenbahnen mit dem $1/r^2$ -Gesetz verträglich sind. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß auch ein anderes Potenzgesetz das gleiche leisten könnte. Wir kommen am Ende dieses Kapitels noch einmal darauf zurück.

13.4.2 Einfache Erklärung der Gesetze

Die Keplerschen Gesetze lassen sich mit zwei Fundamentalsätzen der Mechanik erklären;

1. dem Energiesatz

$$E_k + E_p = E_{ges} = const. \quad (13.21)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \cdot \frac{mM}{r} = E_{ges}$$

und 2. dem (Bahn-)Drehimpulserhaltungssatz

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} = const. \quad (13.22)$$

Wir betrachten stellvertretend für alle Planeten die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne. Dann ist jetzt: m die Erdmasse, v die Bahngeschwindigkeit der Erde, M die Sonnenmasse, \vec{r} der Ortsvektor der Erde bezogen auf die Sonne als Koordinatenursprung. Die Sonne wird als ruhend angenommen, was man angesichts der Massenverhältnisse auch ohne weiteres tun kann ($M = 333\,434 \times m$).

Die exakte Erklärung des I. Keplerschen Gesetzes, das die Planetenbahnen als Ellipsen identifiziert, ist nicht einfach und wird meist durch eine recht trickreiche Integration des Energiesatzes bewerkstelligt. Es gibt auch eine Erklärung, die nur einige Kenntnisse über die Geometrie der Kegelschnitte voraussetzt. Beides wollen wir hier nicht vorführen, sondern schlicht anmerken, daß der Energiesatz nur bei $E_{ges} < 0$ elliptische Planetenbahnen zuläßt; bei $E_{ges} = 0$ ergeben sich Parabelbahnen, bei $E_{ges} > 0$ Hyperbelbahnen. Die elliptischen Planetenbahnen in unserem Sonnensystem besitzen nur sehr kleine Exzentrizitäten und können vereinfacht mit großer Genauigkeit als Kreisbahnen angesehen werden.

Die Aussage der konstanten Flächengeschwindigkeit im II. Keplerschen Gesetz gilt sehr allgemein immer dann, wenn man es mit *Zentralkräften* zu tun hat. Es können dann nämlich keine Drehmomente auftreten, und der Drehimpuls kann sich nicht ändern. Der Drehimpulserhaltungssatz ist aber nichts anderes als die mathematische Formulierung der konstanten Flächengeschwindigkeit (Fig. 13.6).

Schreiben wir den Bahndrehimpuls auf:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \cdot \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2m \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = const. \quad (13.23)$$

Der Betrag des Vektorprodukts $|\vec{r} \times d\vec{r}| = r \cdot dr \cdot \sin(\vec{r}, d\vec{r})$ ist nämlich gerade gleich der Fläche des aus \vec{r} und $d\vec{r}$ aufgespannten Parallelogramms, also gleich zweimal der in Fig. 13.6 schraffierte Dreiecksfläche dA . Der Vektor

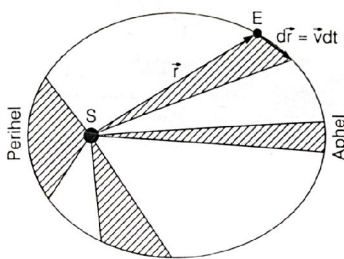


Fig. 13.6: Konstante Flächengeschwindigkeit: der von der Sonne (S) zur Erde (E) gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$d\vec{A}$ hat die Richtung der Flächennormalen und die gleiche Richtung wie der Bahndrehimpuls \vec{L} .

Bleibt also das III. Keplersche Gesetz, das die Umlaufzeiten der Planeten zu ihren Bahnradien in Beziehung setzt. Es folgt direkt aus dem Kräftegleichgewicht, das hier vereinfachend statt des Energiesatzes verwendet wird.

Die Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP} = -m\omega^2\vec{r}$, die den Planeten auf der Umlaufbahn um die Sonne hält, ist mit der gravitativen Anziehungskraft

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \hat{r}$$

zu identifizieren. Gleichsetzen der Beträge liefert sofort

$$m\omega^2 r = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

oder mit $\omega = 2\pi/T$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = const. \quad (13.24)$$

D.h. aber, daß das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit T und der dritten Potenz des Bahnradius r eine von der Planetenmasse unabhängige Konstante darstellt – und das ist die Aussage des III. Keplerschen Gesetzes. Liegt statt einer Kreisbahn eine Ellipsenbahn vor, dann hat man den Bahnradius r durch die große Halbachse a der Ellipse zu ersetzen.

13.4.3 Physikalische Daten von Sonne und Planeten

Bahnen und Massen der großen Planeten					
	a in 10^6 km	ϵ	T	m in kg	m/m_{Erde}
Merkur	57,87	0,2056	87,97 d	$3,28 \cdot 10^{23}$	0,0548
Venus	108,14	0,0068	224,70 d	$4,83 \cdot 10^{24}$	0,8077
Erde	149,50	0,0167	365,26 d	$5,98 \cdot 10^{24}$	1,000
Mars	227,80	0,0934	686,98 d	$6,37 \cdot 10^{23}$	0,1065
Jupiter	777,84	0,0484	11,86 a	$1,90 \cdot 10^{27}$	317,7
Saturn	1426,10	0,0557	29,46 a	$5,57 \cdot 10^{26}$	94,82
Uranus	2867,83	0,0472	84,02 a	$8,80 \cdot 10^{25}$	14,72
Neptun	4493,65	0,0086	164,79 a	$1,03 \cdot 10^{26}$	17,22
Pluto	5899,04	0,2485	247,70 a	$5,40 \cdot 10^{24}$	0,9030

a : große Halbachse der Bahnellipse; ϵ : numerische Exzentrizität der Bahnellipse ($\epsilon = e/a$, e : Abstand Mittelpunkt–Brennpunkt); T : Umlaufzeit um die Sonne ($d = \text{Tag}$, $a = \text{Jahr}$); m : Planetenmasse.

Sonne:	Masse:	$1,993 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 333\,300 \text{ Erdmassen}$
	mittlere Dichte:	$1,409 \text{ g/cm}^3$
	Radius:	$6,964 \cdot 10^5 \text{ km}$
	Volumen:	$1,3 \cdot 10^8 \text{ Erdvolumina}$
	Oberflächentemperatur:	5700 K
	Energieemission der Sonneneroberfläche:	$6,125 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$
	Solarkonstante:	$1,39 \text{ kW/m}^2$
	(auf der Erde empfan- gene Strahlungsleistung der Sonne)	
Erde:	Masse:	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
	mittlere Dichte:	$5,52 \text{ g/cm}^3$
	mittlerer Radius:	6370 km
	Äquatorradius:	6378 km
	Polradius:	6357 km
	Volumen:	$1,083 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$
	mittlere Bahngeschwin- digkeit:	29,8 km/s
Mond:	Masse:	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
	mittlere Dichte:	$3,34 \text{ g/cm}^3$
	Radius:	1738 km
	mittlerer Bahnradius:	$3,85 \cdot 10^8 \text{ m} (\approx 60 \text{ Erdradien})$
	Umlaufzeit:	27,32 Tage

13.5 Ergänzungen

13.5.1 Satellitenbahnen

Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung um die Sonne gelten selbstverständlich auch für die Bewegung der künstlichen Planeten, der Satelliten, um die Erde. Insbesondere gilt der Energiesatz, der die Flugbahn bestimmt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \cdot \frac{mM}{r} = E_{ges}. \quad (13.25)$$

Hierin bedeuten nun m die Masse des Satelliten und M die Erdmasse. Wie oben bereits erwähnt, ergeben sich nur bei $E_{ges} < 0$ Ellipsenbahnen. $E_{ges} > 0$ bedeutet Hyperbelbahnen, $E_{ges} = 0$ Parabelbahnen. In den letzten beiden Fällen verläßt der Satellit den Anziehungsbereich der Erde. Die Bedingung $E_{ges} = 0$ liefert mit $r = R$ (Erdradius) gerade die zur Überwindung der Erdanziehung mindestens notwendige kinetische Energie des Flugkörpers

und damit die sogenannte *erste Fluchtgeschwindigkeit*

$$v^* = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = 11,2 \text{ km/s.} \quad (13.26)$$

Die Startgeschwindigkeit eines Satelliten muß also unter diesem Wert liegen, wenn man ihn auf eine stabile Umlaufbahn bringen will; v^* ist in diesem Sinne eine maximal zulässige Startgeschwindigkeit. Es gibt aber auch eine minimale Startgeschwindigkeit v_0 , unterhalb der er wieder auf die Erdoberfläche zurückfällt. Das ist die Startgeschwindigkeit für eine erdnahe Kreisbahn, die man am einfachsten aus einer Kräftebetrachtung erhält; die Zentripetalkraft F_{ZP} , die den Satelliten auf dieser Kreisbahn hält, ist ja die Erdanziehungskraft F_{an} . Aus

$$F_{ZP} = \frac{mv_0^2}{R} \stackrel{\text{soit}}{=} F_{an} = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

folgt

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = 7,9 \text{ km/s.} \quad (13.27)$$

Hier wurde als Bahnradius des Satelliten ungefähr der Erdradius angenommen.

Die Situation ist zusammenfassend in Fig. 13.7 dargestellt – übrigens eine Darstellung mit historischer Bedeutung; sie findet sich bereits in Newtons „Principia“ von 1687, wo er die Bahnen beschreibt, die ein von einem hohen Berg oder Turm horizontal abgeschlossener Körper durchläuft. Die schraffiert eingezeichnete Erde steht immer in einem Brennpunkt der Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelbahn oder im Mittelpunkt der Kreisbahn. Man erkennt daraus, daß auch ein waagrecht geworfener Stein stets ein Stück einer Ellipsenbahn durchläuft, die jedoch bei den üblichen winzigen Wurfgeschwindigkeiten und daher kleinen durchquerten Raumbereichen, in denen das Erdfeld als homogen angenommen werden kann, gut durch eine Flugparabel angenähert wird.

Mit Startgeschwindigkeiten zwischen 7,9 und 11,2 km/s ergeben sich also Satellitenbahnen, deren Formen sich von erdnahen Kreisbahnen bis zu elliptischen Bahnen sehr hoher Exzentrizität erstrecken. In der Praxis gibt es jedoch Grenzen. Eine untere Grenze diktiert die Erdatmosphäre; die Mindesthöhe h eines Satelliten über der Erdoberfläche beträgt daher ca. 200 km. Rechnet man also mit einem Bahnradius von $R + h = 6370 \text{ km} + 200 \text{ km}$, dann erhält man mit $v_0 = 7,9 \text{ km/s}$ eine Umlaufzeit von ca. 87 min $\approx 1,5 \text{ h}$ für eine erdnahe Kreisbahn. Andererseits sollte – um Störungen durch die Sonne klein zu halten – die große Halbachse a einer sehr exzentrischen Bahn ein Hundertstel des Abstands Erde–Sonne nicht überschreiten. Nimmt man für diese Halbachse einmal 10^6 km an, dann ergibt sich aus dem III. Keplerschen Gesetz (13.24) (wo man r durch a ersetzen muß) eine Umlaufzeit von ca. 115 Tagen, also fast 4 Monaten.

Besonders interessant und für die Nachrichtenübertragung wichtig sind *geostationäre* Satelliten mit einer Umlaufzeit von genau 1 Tag in einer äquatoria-

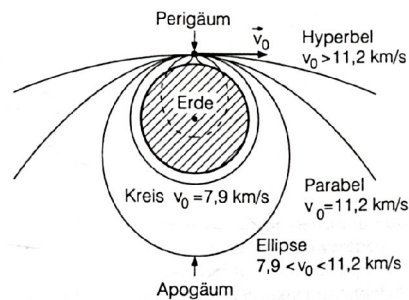


Fig. 13.7: Bahnen von Satelliten, die von einem erhöhten Punkt tangential zur Erdoberfläche abgeschossen werden (aus Newton „Principia“ 1687.)

len Umlaufbahn: Von der Erdoberfläche aus gesehen stehen sie unbeweglich am Himmel. Den Radius ihrer Umlaufbahn kann man wieder aus dem III. Keplerschen Gesetz (13.24) ermitteln,

$$r = \sqrt[3]{\gamma M \frac{T^2}{4\pi^2}} \approx 42\,300 \text{ km.} \quad (13.28)$$

Stellt man den Radius der Erde in Rechnung, dann beträgt die Höhe einer solchen Bahn über dem Erdboden rund 35 900 km. Ein Funksignal benötigt für diese Strecke hin und zurück etwa 0,3 s, was sich bei interkontinentalen Telefonaten, die über Satellitenfunk laufen, durchaus bemerkbar macht.

Aus dem Energiesatz (13.25) hatten wir die Fluchtgeschwindigkeit eines Flugkörpers zum Verlassen des Gravitationsfeldes der Erde zu 11,2 km/s bestimmt. Damit verbleibt er aber immer noch im Einflußbereich der Sonne. Soll er auch das Sonnensystem verlassen, dann bedarf es einer höheren Startgeschwindigkeit, um auch das Gravitationsfeld der Sonne überwinden zu können. Gl. (13.26) muß zu

$$v^{**} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma M_E}{R} + \frac{\gamma M_S}{r_S}} \quad (13.29)$$

erweitert werden. Der erste Term unter der Wurzel repräsentiert die Energie zum Verlassen des Erdfeldes von der Erdoberfläche aus (R : Erdradius), der zweite diejenige zum Verlassen des Sonnenfeldes (r_S : Entfernung Erde-Sonne). Mit den Zahlenwerten aus den Tabellen des vorigen Abschnitts ergibt sich diese sogenannte *zweite Fluchtgeschwindigkeit* zu

$$v^{**} = 43,63 \text{ km/s,} \quad (13.30)$$

wenn der Körper in Richtung der Verbindungslinie Sonne-Erde senkrecht von der Erdoberfläche abgefeuert wird. Man kann sich aber die beträchtliche Bahngeschwindigkeit der Erde von 29,8 km/s zunutze machen, indem man die Rakete tangential zur Erdumlaufbahn abschließt. Es verbleibt dann noch eine Startgeschwindigkeit von 13,8 km/s, die nur relativ wenig über der ersten Fluchtgeschwindigkeit (13.26) liegt.

13.5.2 Zentralbewegungen

Im vorliegenden Kapitel haben wir versucht aufzuzeigen, wie Newtons Gravitationsgesetz die Bewegungen von Planeten und Satelliten beschreibt. Die Idee des $1/r^2$ -Kraftgesetzes war geboren worden durch Betrachtungen zur Mondbeschleunigung (Abschnitt 13.1.1). Die Genauigkeit dieser Betrachtungen war durchaus mittelmäßig, die Abstandspotenz – exakt 2 – im Kraftgesetz also eine Idealisierung. Erst die Überprüfung dieser Idee an den Planetenbewegungen zeigte die Exaktheit des Gesetzes. Einige Beispiele seien angeführt.

Bis 1781 kannte man nur sechs Planeten mit Saturn als dem äußersten. Aus geringfügigen Unstimmigkeiten seiner Bahn schloß man auf die Existenz eines weiteren Planeten, berechnete auf der Basis des $1/r^2$ -Gesetzes

seine Position – und fand den Uranus⁶. Unregelmäßigkeiten in der Uranusbahn führten in gleicher Weise im Jahre 1846 zur Entdeckung des Planeten Neptun⁷ und genauso kam man schließlich 1930(!) zu Pluto als dem nun wohl wirklich äußersten Planeten unseres Sonnensystems. Das demonstriert die außerordentlich hohe Genauigkeit des $1/r^2$ -Gesetzes.

Man kann mathematisch zeigen, daß selbst geringfügige Abweichungen von der Potenz 2 im Kraftgesetz nicht mehr zu exakten Ellipsenbahnen führen: Man erhält dann Rosettenbahnen; die „Ellipsen“ drehen sich langsam um den Brennpunkt, in dem das Kraftzentrum steht. Die Planetenbahnen zeigen derartige, sogenannte Periheldrehungen; sie sind allerdings sehr klein (etwa einige Bogensekunden in 100 Jahren) und können auf Störungen der Planeten untereinander zurückgeführt werden. Einzig beim sonnennächsten Planeten Merkur blieb eine unerklärte Periheldrehung von 41,25 Bogensekunden in 100 Jahren, die erst Einstein in seiner Allgemeinen Relativitätstheorie erklären konnte, indem er sozusagen am Kraftgesetz selbst Änderungen vornahm. Dies geschah jedoch nicht so, daß das Potenzgesetz verändert oder verbessert wurde, sondern durch eine grundlegende Veränderung der Vorstellung von Raum und Zeit besonders in der Nähe von großen gravitierenden Körpern, wie z. B. der Sonne. Daher ist auch die Periheldrehung des sonnennächsten Planeten Merkur am größten. (Zum Vergleich: Einsteins Theorie ergibt eine Periheldrehung von 42,89 Bogensekunden in 100 Jahren.)

Leider läßt sich das $1/r^2$ -Kraftgesetz im Hörsaalexperiment schlecht demonstrieren, auch wenn man statt der winzigen Gravitationskräfte auf elektrische Kräfte zurückgreift, für die ebenfalls ein $1/r^2$ -Gesetz gilt, nämlich das Coulombgesetz. So lassen sich auch die geschilderten „Periheldrehungen“ bei Abweichungen von der Potenz -2 nicht demonstrieren.

Zentralbewegungen, nämlich Ellipsen- und Kreisbahnen, erhält man aber auch bei einem linearen Kraftgesetz, $\vec{F} = D\vec{r}$, und mit diesem läßt sich gut experimentieren. Das Kraftzentrum der Bewegung liegt dann allerdings nicht im Brennpunkt der Ellipse, sondern in ihrem Mittelpunkt (Fig. 13.8). Es ist bekannt, daß ein lineares Kraftgesetz z. B. bei Auslenkung in x -Richtung zu einer harmonischen Schwingung in dieser Richtung führt: $x = a \cdot \cos \omega t$ (Kap. 4.3). Überlagert man dieser eine um $\pi/2$ phasenverschobene Schwingung in y -Richtung, also $y = b \cdot \sin \omega t$, dann beschreibt der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y)$ eine Ellipse.

Abweichungen vom linearen Kraftgesetz führen wie im $1/r^2$ -Fall zu „Periheldrehungen“, die Ellipse dreht sich in der (x, y) -Ebene: Man hat nun Rosettenbahnen wie in Fig. 13.9b gezeichnet. Für ein Demonstrationsexperiment eignet sich ein einfaches Schwebependel (eine leichte Stange mit einer Stahlkugel am Ende), für das bei kleinen Auslenkungen ja auch ein lineares Kraftgesetz gilt (Kap. 4.3) und das man ebenfalls in eine derartig elliptische Bewegung versetzen kann („Kugelpendel oder konisches Pendel“). Beim ungestörten Pendel bleibt, wie erwartet, eine einmal eingestellte Ellipsenbahn erhalten. Setzt man jedoch in die Mitte, einige Millimeter unter das Pendel,

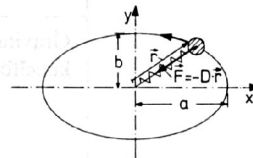


Fig. 13.8: Ein Körper, der elastisch mit einer linearen Feder an einem Punkt verankert ist, beschreibt eine Ellipse. Das Kraftzentrum liegt in der Mitte der Ellipse, nicht in einem Brennpunkt wie bei einem r^{-2} -Gesetz.

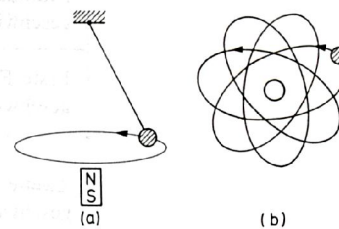


Fig. 13.9: Experiment zur Demonstration von „Periheldrehungen“ mit einem Schwebependel. Die Bahn des eisernen Pendelkörpers wird durch einen starken Permanentmagneten gestört.

⁶ Entdeckt von Frederick William Herschel 1738–1822, London.
⁷ Urbain Leverrier 1811–1877, Paris; Johann Gottfried Galle 1812–1910, Breslau.