TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Arbeitsgruppe Kombinatorik und Algorithmen

DMG

Assistant Prof. Dr. rer. nat. habil. Benedikt Stufler
Philipp Beltran M. Sc.

Sommersemester 2022
17. März 2023

# Algebra und Diskrete Mathematik

## Klausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Studiengang: ______________

*Hinweise:*

- Es sind außer einem Stift keine Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone und sonstige elektronischen Geräte aus und verstauen Sie diese.
- Legen Sie bitte Ihren Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf** Aufgaben erhalten haben.
- Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün und auch nicht mit Bleistift.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
- Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
- Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **100 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| /30 | /7 | /30 | /23 | /10 | /100 |

Name: ______________________________

**Aufgabe 1.** [30 Punkte]

Für $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ seien $1 \leq d_1, ..., d_n \leq n-1$ gegeben, wobei $d_i \in \mathbb{N}$ gelte für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Des Weiteren gelte $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass es einen Baum mit Knoten $x_1, \ldots, x_n$ gibt, sodass $d(x_i) = d_i$ für alle $i$ gilt, wenn $d_1, \ldots, d_n$ die obigen Eigenschaften aufweisen.

Hinweis: $d(x_i)$ gibt hierbei den Kantengrad des Knotens $x_i$ an.

Name: ______________________________

**Aufgabe 2.** [7 Punkte]

Kreuzen Sie den richtigen Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen an. Eine richtige Antwort führt zu einem Punkt, eine falsche zu keinem Punkt. Ein Ankreuzen von "keine Angabe" führt zu einem halben Punkt.

| Aussage | gültig | nicht gültig | keine Angabe |
|---|---|---|---|
| Ist $V$ ein Vektorraum, so ist die leere Menge $\emptyset$ kein Untervektorraum von $V$. | ○ | ○ | ○ |
| Ein Integritätsring enthält mindestens drei Elemente. | ○ | ○ | ○ |
| Jede injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv. | ○ | ○ | ○ |
| Keine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist auch injektiv. | ○ | ○ | ○ |
| Es gibt Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^3$ die linear unabhängig sind. | ○ | ○ | ○ |
| Es gibt eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. | ○ | ○ | ○ |
| Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat Dimension 2 als $\mathbb{C}$-Vektorraum. | ○ | ○ | ○ |

Name: ______________________________

**Aufgabe 3.** [30 Punkte]

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $W$ der Vektoraum, der durch die Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Für den Vektorraum $V/W$ über $\mathbb{R}$ sei die Teilmenge $A$ gegeben durch

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + W, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + W, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + W \right\}.$$

Überprüfen Sie, ob die Menge eine Basis für einen Untervektorraum von $V/W$ ist, sollte es keine sein, dann bestimmen Sie eine Basis von $V/W$. Bestimmen Sie außerdem die Dimension von $V/W$.

Name: ______________________________________________

**Aufgabe 4.** [23 Punkte]

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für $c \in \mathbb{R}$ berechnen Sie die Determinante von $cA$.

b) Berechnen Sie die Determinante von $A^2$.

c) Berechnen Sie die Determinante von $A^3$.

d) Für $c \in \mathbb{R}$ berechnen Sie die Determinante von $(cA)^2$

e) Bestimmen Sie falls möglich die Inverse von cA und deren Determinante.

Name: ____________________

**Aufgabe 5.** [10 Punkte]

a) Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation an.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Äquivalenzrelation an und beweisen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Name: ____________________

Name: ______________________________