

# **Take Home Exam 1**

*IF 2024*

### Aufgabe 1 (Exercise 1): 1 Punkt (1 point)

Jahr/Year	0	1	2	3
Cash Flows		€600	€1200	€1800

*English:*

Use an annual interest rate of 7% to calculate the **future value in year 2** (i.e. at t=2) of the cash flows in the timeline.

*Deutsch:*

Wie lautet der **Future Value** obiger Cash Flows **in Jahr 2** (d.h. zu t=2)?

Annahme: Wir versuchen alle Cashflows in t = 2 zu vergleichen.

**Cashflow @ t = 1:**

$$600€ * 1,07 = FV \text{ in Periode 2} = 642€$$

**Cashflow @ t = 2:**

Der Cashflow der Periode 2 ist bereits in der Periode 2, daher muss er nicht verändert werden.

**Cashflow @ t = 3:**

$$\frac{1800€}{1,07} = PV \text{ in Periode 2} = 1682,24€$$

## Aufgabe 2 (Exercise 2): 2 Punkt (2 points)

*English:*

Suppose that a young couple has just had their first baby, a daughter, and they wish to ensure that enough money will be available to pay for her college education. Currently, college tuition, books, fees, and other costs, average \$12,500 per year. On average, tuition and other costs have historically increased at a rate of 4% per year.

Assume that college costs continue to increase an average of 4% per year and that all her college savings are invested in an account paying 7% interest.

Calculate the amount of money she will need to have available at age 18 to pay for all four years of her undergraduate education.

*Deutsch:*

Ein junges Paar hat gerade sein erstes Kind bekommen, eine Tochter. Die Eltern möchten sicherstellen, dass in der Zukunft genug Geld für die College Ausbildung der Tochter verfügbar ist. Zurzeit belaufen sich die jährlichen Kosten auf durchschnittlich \$12,500 (Studiengebühren, Bücher, etc.). Historisch haben diese Kosten jährlich um 4% zugenommen.

Angenommen die Kosten für die College Ausbildung steigen auch in der Zukunft jährlich um 4%. Welchen Betrag benötigt die Tochter im Alter von 18 Jahren, um damit über die gesamten 4 Jahre ihrer College Ausbildung alle Kosten jährlich bezahlen zu können. Der Zinssatz am Sparkonto für die College Ausbildung beträgt 7% p.a.

Zur Veranschaulichung der Kalkulation werde ich im Folgenden jeden Cashflow zuerst auf (inflation) und dann wieder abzinsen (rate).

	tuition @ t=0	inflation	rate	clean tuition	accrual
period 1 (18)	\$ 12 500,00	1,04	1,07	\$ 25 322,71	\$ 25 322,71
period 2 (19)	\$ 12 500,00	1,04	1,07	\$ 26 335,61	\$ 24 612,72
period 3 (20)	\$ 12 500,00	1,04	1,07	\$ 27 389,04	\$ 23 922,65
period 4 (21)	\$ 12 500,00	1,04	1,07	\$ 28 484,60	\$ 23 251,92
					<u>\$ 97 110,00</u> -> college fund

Via  $(\text{tuition @ t=0}) * (\text{inflation}^{(\text{period} + 17)}) / (\text{rate}^{(\text{period} - 1)})$  für jeden cashflow und dann summiert.

**Daraus folgt: Die dann 18-jährige benötigt einen Betrag von \$97,100.00.**

### Aufgabe 3 (Exercise 3): 1 Punkt (1 point)

*English:*

Suppose the interest rate is 9% APR with monthly compounding. Calculate the present value of an annuity that pays \$250 every three months for the next five years.

*Deutsch:*

Angenommen der Zinssatz beträgt 9% APR bei monatlicher Verzinsung. Welchen aktuellen Wert (Present Value) besitzt dann eine Annuität mit Zahlungen von €250 pro Quartal über eine Fristigkeit von 5 Jahren?

$$EAR = \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12} - 1 = 9,380689\%$$

$$quarterly = \sqrt[4]{1 + EAR} - 1 = 2,266917\%$$

$$PV = 250\$ * \frac{1}{0,02266917} * \left(1 - \frac{1}{1,02266917^{20}}\right) = 3984,49\$$$

**Daraus folgt: Der Present Value der Annuität ist 3,984.49\$.**

#### Aufgabe 4 (Exercise 4): 2 Punkte (2 points)

*English:*

Consider an investment that pays €1,000 certain at the end of each of the next four years. Calculate the four-year risk-free interest rate if the investment costs €3,500 and has an NPV of €74.26.

Use the following term structure of (risk-free) interest rates for your calculations:

Term	1 year	2 years	3 years	5 years	10 years	20 years
Interest Rate (EAR%)	5.00%	4.80%	4.60%	4.50%	4.25%	4.15%

*Deutsch:*

Eine Investition erbringt jeweils am Ende der kommenden vier Jahre sichere Cash Flows von jeweils €1,000. Zu berechnen ist der vierjährige (risikolose) Zinssatz (EAR), wenn sich die Investitionskosten (zu  $t=0$ ) auf €3,500 belaufen und der NPV €74.26 beträgt.

Nachfolgende Marktzinssätze (EAR, risikolos) stehen zur Verfügung:

Laufzeit	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Zinssatz (EAR%)	5.00%	4.80%	4.60%	4.50%	4.25%	4.15%

$$74,26€ = -3500€ + \frac{1000€}{1,05} + \frac{1000€}{1,048^2} + \frac{1000€}{1,046^3} + \frac{1000€}{(1+x)^4}$$

$$\frac{1000€}{(1+x)^4} = 837,6€$$

$$\frac{5,623413252}{1+x} = 5,379713742$$

$$\frac{5,623413252}{5,379713742} = 1+x = 1,045299717$$

**Daraus folgt:  $x = 4,5299717\%$**

### Aufgabe 5 (Exercise 5): 1 Punkt (1 point)

*English:*

Consider the following two projects with cash flows in €:

Project	Year 0	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6	Year 7	Discount Rate
Alpha	-79	20	25	30	35	40	N/A	N/A	15%
Beta	-80	25	25	25	25	25	25	25	16%

Assume that projects Alpha and Beta are mutually exclusive. Calculate the NPV for each Project. Which of the two projects should be selected?

*Deutsch:*

Die Projekte Alpha und Beta besitzen die folgenden Cash Flows (in €):

Projekt	Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Diskontierungszinssatz
Alpha	-79	20	25	30	35	40	N/A	N/A	15%
Beta	-80	25	25	25	25	25	25	25	16%

Zu berechnen ist der NPV für jedes der beiden Projekte. Welches der beiden Projekte ist zu wählen, wenn sich die beiden Projekte gegenseitig ausschließen?

**Project Alpha:**

$$-79€ + \frac{20€}{1,15} + \frac{25€}{1,15^2} + \frac{30€}{1,15^3} + \frac{35€}{1,15^4} + \frac{40€}{1,15^5} = 16,91881601€$$

**Project Beta:**

$$25€ * \frac{1}{0,16} * \left(1 - \frac{1}{1,16^7}\right) = 20,96€$$

**Daraus folgt: Beta sollte gewählt werden.**

### Aufgabe 6 (Exercise 6): 3 Punkte (3 points)

*English:*

Consider the following list of projects:

Project	Investment (€)	NPV (€)
A	405,000	18,000
B	600,000	90,000
C	375,000	60,000
D	450,000	6,000
E	525,000	30,000
F	225,000	30,000
G	240,000	27,000
H	600,000	60,000
I	150,000	12,000
J	270,000	30,000

You are given a budget of only €1,800,000 to invest in projects. (i) Which projects will you select, (ii) in what order will you select them, and (iii) why?

*Deutsch:*

Die folgenden Projekte stehen zur Auswahl:

Projekt	Investment (€)	NPV (€)
A	405,000	18,000
B	600,000	90,000
C	375,000	60,000
D	450,000	6,000
E	525,000	30,000
F	225,000	30,000
G	240,000	27,000
H	600,000	60,000
I	150,000	12,000
J	270,000	30,000

Ihr Budget für Investitionen in diese Projekte beträgt nur €1,800,000.

(i) Welche Projekte sind zu wählen?

(ii) In welcher Reihenfolge sind diese Projekte zu wählen?

(iii) Begründen Sie die Auswahl und Reihenfolge in (i) und (ii).

(i) Welche Projekte sind zu wählen?

Es sind die Projekte C, B, F und H zu wählen.

(ii) In welcher Reihenfolge sind diese Projekte zu wählen?

In der oben beschriebenen C -> B -> F -> H.

(iii) Begründen Sie die Auswahl und Reihenfolge.

Die Auswahl ergibt sich aus der Errechnung eines PI (= Profitability Index; via NPV/Investment) und danach das Durchführen eines „Greedy“-Algorithmus, also der Wahl der besten Profitabilitäten nacheinander, bis das Budget aufgebraucht ist. Ich kaufe mir mit meinem Budget also kurz gesagt den meisten Gesamt-NPV ein.

In diesem Fall kann der Greedy-Algorithmus jedoch nicht perfekt funktionieren, da es keine Minimalelemente gibt. Das Ergebnis wäre C, B, F, G und J (C -> B -> F -> G -> J) wodurch sich ein Gesamt-NPV von 237.000€ ergeben, würde mit einem Budgetüberschuss von 90.000€ (Profitabilität von 13,1666%).

Man sieht schnell, dass man G und J mit H substituieren kann und damit mehr NPV (= 240.000€) generiert (Profitabilität von 13,33%).

Daraus folgt: Es sind die Projekte C, B, F und H zu wählen (C -> B -> F -> H).

Projekt	Investment (€)	NPV (€)	PI
A	€ 405 000,00	€ 18 000,00	4,44%
B	€ 600 000,00	€ 90 000,00	15,00%
C	€ 375 000,00	€ 60 000,00	16,00%
D	€ 450 000,00	€ 6 000,00	1,33%
E	€ 525 000,00	€ 30 000,00	5,71%
F	€ 225 000,00	€ 30 000,00	13,33%
G	€ 240 000,00	€ 27 000,00	11,25%
H	€ 600 000,00	€ 60 000,00	10,00%
I	€ 150 000,00	€ 12 000,00	8,00%
J	€ 270 000,00	€ 30 000,00	11,11%