8. Durch $z=\frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im R^3 gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x=e^t$ und $y=e^{-t}$ $t\in R$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

Definition, Skriptum, Seite 6: $F(x)=f(u(x),v(x))\rightarrow F'=f_u u'+f_v v'$

eingesetzt für das Beispiel: $F(t)=f(x(t),yt(t))\rightarrow F'=f_x x'+f_y y'$

$f(x,y)=z=\frac{xy}{x+y}$, $x(t)=e^t$, $y(t)=e^{-t}$ $t\in R$

kurze Nebenrechnung:

$x(t)=e^t \rightarrow x'(t)=e^t$

$y(t)=e^{-t} \rightarrow y'(t)=-1\cdot e^{-t}\cdot 1=-e^{-t}$ Achtung: Kettenregel!

$$f_x=\frac{y\cdot(x+y)-1\cdot xy}{(x+y)^2}=\frac{xy+y^2-xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$f_y=\frac{x\cdot(x+y)-1\cdot xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2+xy-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{dz}{dt}f_x x'+f_y y'=\frac{y^2}{(x+y)^2}\cdot e^t+\frac{x^2}{(x+y)^2}\cdot(-e^{-t})=\frac{y^2\cdot e^t-x^2\cdot e^{-t}}{(x+y)^2}$$

nun einsetzen mit $x=e^t$ und $y=e^{-t}$

$$=\frac{y^2\cdot e^t-x^2\cdot e^{-t}}{(x+y)^2}=\frac{(e^{-t})^2\cdot e^t-(e^t)^2\cdot e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{e^{-2t+t}-e^{2t-t}}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$$

Probe: $x=e^t$ und $y=e^{-t}$ in z einsetzen und dann nach t differenzieren:

$$z=\frac{xy}{x+y}=\frac{e^t\cdot e^{-t}}{(e^t+e^{-t})}=\frac{e^{t-t=0}}{(e^t+e^{-t})}=\frac{1}{(e^t+e^{-t})}=\frac{0*(e^t+e^{-t})-1*(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{-e^t+e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$$