1. Höhere Kombinatorik

S endliche Menge, $|S| = ?$ Mächtigkeit (Anzahl der Elemente)

S_n, $n \in I$, System endl. Mengen $f(n) = |S_n| = ?$
↳ Zählfunktion

Suchen
- geschlossene Formel
- Summenformel
- Rekursion
- erzeugende Funktion
- Abschätzungen, Schranken, asymptotisches Verhalten

für die Zählfunktion $f(n)$.

Bsp. 1: S_n = Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$

$\Rightarrow$
- $f(n) = |S_n| = n!$
- $f(1) = 1$, $f(n) = n \cdot f(n-1)$ für $n \geq 2$
- $f(n) \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ Stirling-sche Formel
  ↳ asymptotisch gleich $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1$

Bsp. 2: P_n = Menge aller fixpunktfreien Permutationen von $1, \dots, n$
d.h. $\pi \in S_n$, $\pi(i) \neq i$ $\forall i$

z.B. $n=3$

123
132
213
231 ✓
312 ✓
321

$|P_3| = 2$

Anteil $= \frac{|P_3|}{|S_3|} = \frac{1}{3}$

sei $f(n) = |P_n|$

- $f(n) = n!$ alle Perm.

$-\binom{n}{1}(n-1)!$ Perm. mit 1, 2, …, oder n als Fixpunkt

$+\binom{n}{2}(n-2)!$ Perm. mit mind. 2 Fixpunkten

$-\binom{n}{3}(n-3)!$

$+ - \dots$

± 1 Perm. mit n Fixpunkten

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}(n-k)!}_{\frac{n!}{k!}} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = f(n)$$

Summenformel (nach Inklusions-Exklusions-Prinzip)

- es gilt $f(n) = (n-1)(f(n-1) + f(n-2))$ für $n \geq 3$
$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
- $f(n) = n! \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\text{Partialsumme der Exponentialreihe}} \sim n! \cdot e^{-1} = \frac{n!}{e}$

$\Rightarrow$ Anteil der fixpunktfreien Perm. $= \frac{f(n)}{n!} \sim \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

Bsp. 3: gesucht alle Auswahlen (Kombinationen) aus 3 Personen a, b, c

$$(a^0 + a^1)(b^0 + b^1)(c^0 + c^1)$$
$$= (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + 1\cdot 1\cdot c + 1\cdot b\cdot 1 + 1\cdot b\cdot c + a\cdot 1\cdot 1 + a\cdot 1\cdot c + a\cdot b\cdot 1 + abc$$
$$= 1 + (a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc$$

$\uparrow$ keine Personen gewählt — $\uparrow$ 2 Personen gewählt

setze $a = b = c = z$ (für Anzahl)

$$(1+z)(1+z)(1+z) = (1+z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$

$\uparrow$ Anzahl Möglichkeiten, 2 Personen auszuwählen

allg. für n Personen:
$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$$

$\uparrow$ # Möglichkeiten, k von n Pers. auszuwählen

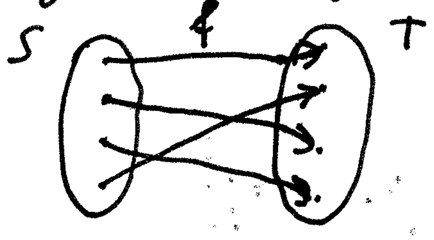
allg. Zählfkt $f(n) = a_n$, $n \geq 0$ $\leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = A(z)$

$\downarrow$ erzeugende Funktion

1.1 Grundlagen der Kombinatorik
Elementare Zählprinzipien

1. Summenregel: $|S \cup T| = |S| + |T|$ falls $S \cap T = \emptyset$
bzw. $|\bigcup S_i| = \sum |S_i|$ falls $S_i \cap S_j = \emptyset$ $i \neq j$
2. Produktregel: $|S \times T| = |S| \cdot |T|$
bzw. $|\prod S_i| = \prod |S_i|$
$\hookrightarrow$ kart. Produkt

3. Gleichheitsregel: $f: S \to T$, f bijektiv $\Rightarrow |S| = |T|$



Bsp: (Teilmengenproblem)

sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$P(A) = \{B \subseteq A\}$ Potenzmenge, $|P(A)| = ?$

wählen f: Teilmenge $B \in P(A) \mapsto$ Vektor $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0,1\}^n$

mit $b_i = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & a_i \notin B \end{cases}$

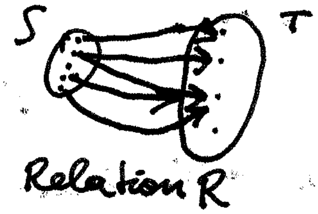
z.B. $B = \{a_2, a_3, a_5\} \mapsto (0,1,1,0,1,0,\dots,0)$

f ist bijektiv

$\Rightarrow |P(A)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$

4. Regel vom zweifachen Abzählen:

Idee:



Inzidenzmatrix

S \ T	1	2	3	4	
1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	2
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1
	1	1	3	0	5

Sei $R \subseteq S \times T$ binäre Relation zw. S und T

$a \in S$: $r^+(a) = |\{b \in T \mid a R b\}|$ = # der zu a inzidenten Elemente aus T

$b \in T$: $r^-(b) = |\{a \in S \mid a R b\}|$ = # der zu b inzidenten Elemente aus S

$$\Rightarrow \sum_{a \in S} r^+(a) = \sum_{b \in T} r^-(b)$$

Bsp: (durchschnittliche Anzahl von Teilern einer natürl. Zahl n)

z.B. $n = 8$ wählen $S = T = \{1, 2, \dots, 8\}$

$R \subseteq S \times T$ $aRb \Leftrightarrow a \mid b$

Inzidenzmatrix

R (S \ T)	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1		1		1
3			1			1		
4				1				1
5					1			
6						1		
7							1	
8								1

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 20 \end{array}$$

Teiler: $\tau(8) = 4$ (Spaltensumme)

durchschnittliche # Teiler $\overline{\tau}(8) = \frac{1}{8} \sum_{\cancel{b\in T}\ b=1}^{8} \tau(b) = \frac{1}{8} \cdot 20 = \frac{5}{2}$

allg. $\tau(n) = ?$ $\tau(p) = 2$ p prim

$\tau(p^e) = e+1$ p^e Primzahlpotenz

$\tau(n) = \prod (e_i + 1)$ falls $n = \prod p_i^{e_i}$

$$\overline{\tau}(n) = \frac{1}{n} \sum_{b\in T} \tau(b) = \frac{1}{n} \sum_{b\in T} r^-(b) \overset{\text{Regel 4}}{=} \frac{1}{n} \sum_{a\in S} r^+(a) = \frac{1}{n} \sum_{a\in S} \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$$

Teiler von b # Vielfachen von a

$$\approx \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{n}{a} = \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = H_n$$ n-te harmonische Zahl $\approx \log n$

Also $\boxed{\overline{\tau}(n) \sim \log n}$

5. 10. 2007

$\tau(n) =$ # Teiler von n

$\overline{\tau}(n) =$ durchschnittl. # Teiler von n $\sim \log n$ ← natürlicher Logarithmus

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n$; genauer $H_n - \log n \to \gamma \approx 0{,}577$ Euler-Mascheroni-Konstante

ferner gilt $\overline{\tau}(n) - \log n \to 2\gamma - 1 \approx 0{,}15$

$\lfloor x \rfloor = [x]$

floor   Gauß-Klammern

- Abzählen von Mengen – Binomialkoeffizienten

Zählkoeffizienten:

$n! = n(n-1) \ldots 1$, $n \geq 1$; $0! = 1$ Fakultät

$n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{k}$ fallende Faktorielle

$n^{\overline{k}} = \underbrace{n(n+1)\ldots(n+k-1)}_{k}$ steigende Faktorielle

insb. $n^{\underline{0}} = n^{\overline{0}} = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ def. für $0 \leq k \leq n$ insb. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ Menge (n-Menge)

(1) # Anordnungen d. Elemente von A (Permutationen ohne Wiederholungen) $= n!$

A wie oben, wähle k Elemente aus

(2) # k-Teilmengen von A (ungeordnete Auswahl versch. Elemente) Kombination ohne Wiederholung $= \binom{n}{k}$

(3) # geordneten k-Teilmengen von A (geordnete Auswahl versch. Elemente, Variation ohne Wh.) $= \binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$

insb. $k = n$: $n^{\underline{n}} = n! \rightarrow (1)$

Bem. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Sei $B = \{\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{k_n}\} = \{a_1^{(k_1)}, a_2^{(k_2)}, \dots, a_n^{(k_n)}\}$ Vielfachheit

Multimenge über $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$|B| = \sum_{i=1}^{n} k_i =: N$

z.B. $B = \{1,1,2,2,2,3\} = \{1^{(2)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\} \Rightarrow |B| = 6$

(4) # Anordnungen d. Elemente von B (Perm. mit Wh.) $= \dfrac{N!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$

sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ n-Menge

(5) # k-Multimengen über A (ungeordnete Auswahl von nicht notwendig versch. Elementen, Komb. m. Wh.) $= \dfrac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$

Bew.: wählen S = Menge aller k-Multimengen über $A = \{1, 2, \dots, n\}$

T = Menge aller k-Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$

$f: S \rightarrow T \quad f(\underbrace{\{a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\}}_{\in S}) = \underbrace{\{a_1 < a_2 + 1 < \dots < a_k + k - 1\}}_{\text{k-Menge über } \{1, \dots, n+k-1\} = T}$

$\Rightarrow f$ bijektiv, $f^{-1}(\underbrace{\{b_1 < b_2 < \dots < b_k\}}_{\in T}) = \underbrace{\{b_1 \leq b_2 - 1 \leq \dots \leq b_k - k + 1\}}_{\in S}$

Gleichheitsregel

$\Longrightarrow |S| = |T| = \binom{n+k-1}{k}$ q.e.d.

(6) # geordnete k-Multimengen über A (geordnete Auswahl nicht notwendig versch. Elt., Variation m. Wh.) $= n^k$

(1)–(6): Grundformeln der elementaren Kombinatorik

zurück zu den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ $0 \le k \le n$

setzen $\binom{n}{k} = 0$ falls $k<0$ oder $k>n$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \end{aligned}\right\} \forall n \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}$$

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ $\forall x,y \in \mathbb{C};\ n \ge 0$ (Binomischer Lehrsatz)

$\Rightarrow (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ $\quad x=1:\ 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$x=-1:\ 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Pascal'sches Dreieck:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$k=0,1\ \dots \rightarrow$ $\quad m=2$ $\quad k=2$

eigentlich $\begin{matrix} 0\,0 & / \backslash & 0\,0 \\ 0 & / \dots \backslash & 0 \end{matrix}$

Σ
1
2
4
8
16
32
64

Satz: (i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ Zeilensummen

(ii) $\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, $n,k \ge 0$ Spaltensumme

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$ $m,n \ge 0$ Diagonalsummen (li oben → re unten)

Bew. (i) klar

(ii) Induktion nach n (k fest)

$n=0:\ \binom{0}{k} = \binom{1}{k+1}$ $\quad k=0:\ 1=1$ ✓

$k \ge 1:\ 0=0$ ✓

$n \mapsto n+1:\ \sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$ q.e.d.

(iii) analog, oder aus (ii) mittels Indextransformation

Erweiterung: sei $x \in \mathbb{R}$ oder $x \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x(x-1)\dots(x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x(x+1)\dots(x+k-1) \end{aligned}\right\} k \geq 1$$

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$$

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = \dfrac{x^{\underline{k}}}{k!} & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

z.B. $\binom{x}{3} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$

$\binom{x}{0} = 1$

$\binom{x}{-2} = 0$

Lemma: $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k} \quad \forall x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$

Bew: $k < 0 : 0 = 0$ ✓

$k = 0 : 1 = 0 + 1$ ✓

$k \geq 1$: z.z. $\underbrace{\binom{x}{k}}_{p(x)} = \underbrace{\binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}}_{q(x)}$

Polynome in $\mathbb{C}[x]$ vom Grad $k \geq 1$

$p(n) = q(n) \quad \forall n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow p(x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$ q.e.d. Polynommethode

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ Polynom in } \mathbb{C}[x] \text{ vom Grad } k \\ p(x) = 0 \text{ für } k+1 \ x\text{-Werte} \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) \equiv 0$$

Satz (Negation): $\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k} \quad \forall x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$

Bew.: $(-x)^{\underline{k}} = (-x)(-x-1)\dots(-x-k+1)$

$= (-1)^k x(x+1)\dots(x+k-1) = (-1)^k x^{\overline{k}}$

(Reziprozitätsgesetz zw. fallenden u. steigenden Faktoriellen)

$\Rightarrow \binom{-x}{k} = \dfrac{(-x)^{\underline{k}}}{k!} = \dfrac{(-1)^k x^{\overline{k}}}{k!} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k} \quad (k \geq 0)$ q.e.d.

Satz (Vandermonde'sche Identität)

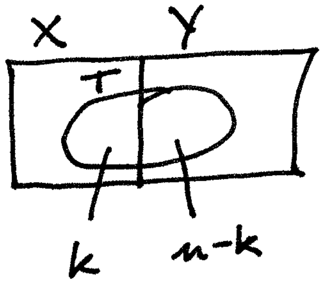
$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \quad \forall x, y \in \mathbb{C},\ n \geq 0$$

Bew.: sei zunächst $x, y \in \mathbb{N}$, X, Y Mengen mit $|X| = x$, $|Y| = y$, $X \cap Y = \emptyset$

$\binom{x+y}{n} = \#$ n-Teilmengen von $X \cup Y$

für jede solche Teilmenge T gilt: $|T \cap X| = k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$

$|T \cap Y| = n-k$



$k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow$ # n-Teilmengen von $X \cup Y = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$

Rest mit Polynommethode q.e.d.
(Gleichheit $\forall x, y \in \mathbb{C}$)

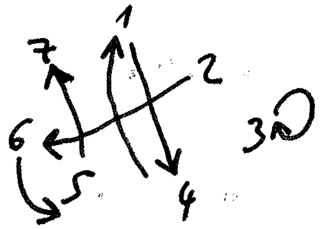
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

11.10.2007

Abzählen von Permutationen und Partitionen – Stirling-Zahlen
betrachten $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \in S_n$, $|S_n| = n!$

z.B. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$



3 Zyklen: $(1\ 4)$ d. Länge 2
$(2\ 6\ 5\ 7)$ 4
(3) 1
Fixpunkt

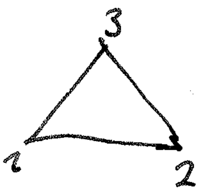
$\pi = (1\,4)(2\,6\,5\,7)(3)$ Zyklendarstellung von π

Es gilt: Jede Permutation kann als Produkt von elementfremden Zyklen angeschrieben werden.

Bem: • Reihenfolge der Zyklen beliebig
• Anfangselement innerhalb eines jeden Zyklus beliebig

Wollen Permutationen nach d. Anzahl ihrer Zyklen abzählen:

z.B. S_3 : $(1)(2)(3)$ ident. Abb. 1
$(1)(2\,3), (2)(1\,3), (3)(1\,2)$ Spiegelungen 3
$(1\,2\,3), (1\,3\,2)$ Drehungen 2
$6 = 3!$



Def: $s_{n,k}$ = # Permutationen von n Elementen mit k Zyklen ($1 \le k \le n$)
$\to$ Stirling-Zahl 1. Art

also $s_{3,1} = 2$, $s_{3,2} = 3$, $s_{3,3} = 1$

Allg. gilt: $s_{n,1} = (n-1)!$ $\qquad (1 \underbrace{\ldots\ldots}_{n-1})$

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2} \qquad (\underbrace{\cdot\ \cdot}_{2\text{-Zyklus}})(\cdot)\ldots(\cdot)$$

$$s_{n,n} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

Setzen $s_{0,0} = 1$

$$s_{n,0} = s_{0,k} = 0 \quad \text{für } n,k \geq 1$$

Satz: (Rekursion für Stirling-Zahlen 1. Art):

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k} \qquad \forall\, n,k > 0$$

Bew: sei 1 fest $\pi = \underbrace{(1\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots)}_{k \text{ Zyklen}}$ mit k Zyklen

1. Fall: 1 ist Fixpunkt
   $\Rightarrow$ es gibt $s_{n-1,k-1}$ solche Perm.
2. Fall: 1 ist kein Fixpunkt $\Rightarrow$ es gibt $(n-1)\cdot s_{n-1,k}$ solche Perm.

   1 kann vor jedem der restl. $n-1$ Elemente stehen

$\Rightarrow s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$ q.e.d.

Schreibweise auch $s_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$

Stirling-Dreieck 1. Art

	k=0	1 →				
n=0	1	0	0 ...			
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	24	50	35	10	1

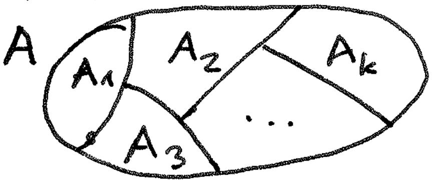
↓ usw.

$(n-1)!$ $\qquad \binom{n}{2}$

Berechnen $s_{n,2} = ?$

$$\begin{aligned} s_{n,2} &= s_{n-1,1} + (n-1)s_{n-1,2} \\ &= (n-2)! + (n-1)(s_{n-2,1} + (n-2)s_{n-2,2}) \\ &= (n-2)! + (n-1)(n-3)! + (n-1)(n-2)(\text{usw.}) \\ &= (n-2)! + (n-1)(n-3)! + (n-1)(n-2)(n-4)! + \ldots \\ &\quad + (n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot \underbrace{s_{2,2}}_{1} \\ &= (n-1)!\underbrace{\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1}\right)}_{H_{n-1}} \\ &= (n-1)!\, H_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Partitionen von $A = \{1, 2, \dots, n\}$



$P = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ k-Partition

mit $A_i \neq \emptyset \ \forall i$

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

z.B. $A = \{1,2,3,4\}$

1234   1   1-Partition

1|234, 2|134, 3|124, 4|123
12|34, 13|24, 14|23   } 7 2-Partitionen

1|2|34, 1|3|24, 1|4|23,
2|3|14, 2|4|13, 3|4|12   } 6 3-Partitionen

1|2|3|4   1   4-Partition

15 Partitionen

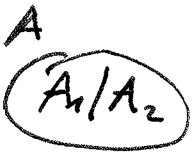
Def: $S_{n,k} = \#$ k-Partitionen (Partitionen mit k Klassen) einer n-Menge $1 \le k \le n$

↳ Stirling-Zahlen 2. Art

z.B. $S_{4,1} = 1, \ S_{4,2} = 7, \ S_{4,3} = 6, \ S_{4,4} = 1$

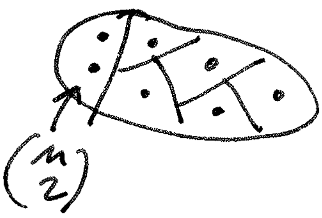
allg. gilt $S_{n,1} = 1$

$S_{n,2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$



$2^n - 2$ Mögl. für A_1

$S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$



$S_{n,n} = 1$

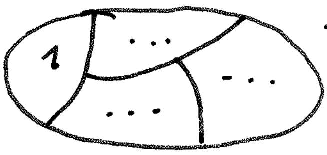
setzen $S_{0,0} = 1$

$S_{n,0} = S_{0,k} = 0$ für $n, k > 0$

Satz: (Rekursion für Stirling-Zahlen 2. Art)

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \quad \forall n,k > 0$$

Bew:



n-Menge

1. Fall: $\{1\}$ Klasse für sich $\Rightarrow$ es gibt $S_{n-1,k-1}$ solche Partitionen (mit insg. k Klassen)

$\{1\}$ keine Klasse für sich $\Rightarrow \cancel{S_{n-1,k}}$

es gibt $k \cdot S_{n-1,k}$ solche ~~Perm.~~ Partitionen

$\uparrow$ 1 in jeder der k Klassen

$$\Rightarrow S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \quad \text{q.e.d.}$$

Schreibweise $S_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\}$: $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$.

Stirling-Dreieck 2. Art:

	$k=0$	1	$\rightarrow$				Σ
$n=0$	1	0	…				1
1	0	1					1
2	0	1	1				2
3	0	1	3	1			5
4	0	1	7	6	1		15
5	0	1	15	25	10	1	52
$\downarrow$		$\uparrow$ usw.			$\uparrow$		$\llcorner$ Bell-Zahlen
		$2^{n-1}-1$			$\binom{n}{2}$		

Zus.hang zw. Stirling-Zahlen 1. und 2. Art:

Satz: $\forall x \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ gilt

(i) $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$

(ii) $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$

Bem: Polynome vom Grad $\leq n$ = Vektorraum (d. Dimension $n+1$)

Basis: $1, x, x^2, \ldots, x^n$

$1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots, x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$

Basiswechsel wird beschrieben durch Stirling-Zahlen

12.10.2007

$\} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Satz: (i) $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\, x^k$

(ii) $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}$

Bew. von (i) durch Induktion:

$n=0$ $\quad x^{\underline{0}} = 1 = s_{0,0}\cdot x^0$ ✓

$n-1 \mapsto n$: $x^{\underline{n}} = x^{\underline{n-1}}\cdot(x-n+1)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k} s_{n-1,k}\cdot x^k\cdot(x-n+1)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\cdot s_{n-1,k}\cdot x^{k+1}}_{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1-k+1} s_{n-1,k-1}\cdot x^k} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k} s_{n-1,k}\cdot x^k (n-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\underbrace{\left(s_{n-1,k-1}+(n-1)\,s_{n-1,k}\right)}_{s_{n,k}} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} s_{n,k}\cdot x^k \quad \text{q.e.d.}$$

Bsp: (i) $x^{\underline{3}} = -0 + s_{3,1}\cdot x^1 - s_{3,2}\, x^2 + s_{3,3}\, x^3 \qquad n=3$

$= 2x - 3x^2 + x^3$

$x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ✓

(ii) $x^3 = \underset{0}{S_{3,0}}\, x^{\underline{0}} + \underset{1}{S_{3,1}}\, x^{\underline{1}} + \underset{3}{S_{3,2}}\, x^{\underline{2}} + \underset{1}{S_{3,3}}\, x^{\underline{3}}$

$= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) \ldots = x^3$ ✓

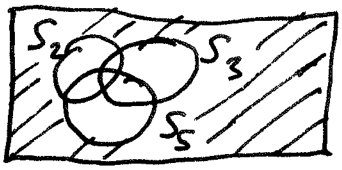
<u>Kombinatorische Grundprinzipien</u>

$S_1, S_2, \ldots, S_m \qquad \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = ?$ $\quad S_i$ paarw. disjunkt → Summenregel
sonst → Inklusion-Exklusion

Bsp: Wieviele Zahlen zw. 1 und 30 sind relativ prim zu 30?
Antwort: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 also $8 = \varphi(30)$

ggT = 1

S



$S = \{1, \dots, 30\} \qquad 30 = 2\cdot 3\cdot 5$

$S_2 = \{2, 4, 6, \dots, 30\} \qquad |S_2| = \left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor = 15$

S_3, S_5

$$|S \setminus (S_2 \cup S_3 \cup S_5)| = |S| - (|S_2| + |S_3| + |S_5|) + (|S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_5| + |S_3 \cap S_5|) - |S_2 \cap S_3 \cap S_5|$$

$$= 30 - (15 + 10 + 6) + (5 + 3 + 2) - 1 = 8 \checkmark$$

genauso $|S_2 \cup S_3 \cup S_5| =$

<u>Satz</u>: Für Mengen $S_1, \dots, S_m \subseteq S$ gilt

(i) $$|S \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i| = |S| - \sum_{1\le i\le m} |S_i| + \sum_{\substack{i,j \\ 1 \le i < j \le m}} |S_i \cap S_j| - + \dots + (-1)^m |S_1 \cap \dots \cap S_m|$$

(ii) $$|\bigcup_{i=1}^m S_i| = \sum_{1 \le i \le m} |S_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |S_i \cap S_j| + - \dots + (-1)^{m-1} |S_1 \cap \dots \cap S_m|$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} S_i \right|$$

Bew: o.B.d.A. von (ii)

sei $x \in \bigcup_{i=1}^m S_i$, gelte $x \in S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$, aber $x \notin S_j$ sonst

Wie oft wird x gezählt?

li. Seite: 1 mal

re. Seite: $k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - + \dots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} =$

$$= 1 - \underbrace{\left(1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + - \dots + (-1)^k \binom{k}{k}\right)}_{0 \quad \text{Wechselsumme im Pascalschen Dreieck}} = 1 \text{ mal} \qquad \text{q.e.d.}$$

Inklusions-Exklusions-Prinzip (Siebformel): Sei S eine Menge mit n Elementen und $E_1, E_2, \dots, E_m$ Eigenschaften, $N(E_{i_1} \dots E_{i_k})$ = # Elemente von S, welche die Eig. $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ besitzen, und $\bar{N}$ = # Elemente von S, welche keine der Eig. $E_1, \dots, E_m$ besitzen.

Dann gilt: $$\bar{N} = n - \sum_i N(E_i) + \sum_{i<j} N(E_i E_j) - + \dots + (-1)^m N(E_1 \dots E_m)$$

Bsp: Betrachten Zeichen $a_1, \ldots, a_n$

\# Wörter der Länge $2n$, die jedes a_i genau 2 mal enthalten, und keine gleichen Zeichen nebeneinander = ?

z.B. $n=2$ $\{a,b\}$

aabb
abab ✓
abba
baab
baba ✓
bbaa

also 2

S = Menge aller Wörter der Länge $2n$, die jedes a_i genau 2 mal enthalten

$$\Rightarrow |S| = \frac{(2n)!}{\underbrace{2!\,2! \ldots 2!}_{n}} = \frac{(2n)!}{2^n} \quad \text{Perm. mit Wdh.}$$

E_i … Wort enthält $a_i a_i$ nebeneinander

$$\Rightarrow N(E_i) = (2n-1) \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}}$$

$2n-2$

$a_i a_i$

2n-1 Möglichkeiten

allg. $N(E_{i_1} \ldots E_{i_k})$

$$= \binom{2n-k}{k} \cdot k! \, \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}$$

Positionen für Paare; Perm. d. Paare; Anordnungen d. restl. $n-k$ Paare

$2n$: $\sqcup \; \sqcup \; \ldots\ldots$

k Paare; $2n-2k$ restl. Zeichen

$\binom{k+2n-2k}{k}$ Mögl.

(stimmt auch für $k=0,1$)

$$\Rightarrow \bar{N} = |S| - \sum_i N(E_i) + \sum_{i_1<i_2} N(E_{i_1} E_{i_2}) - + \ldots$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n} - + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} k! \, \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \qquad k \mapsto n-k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} \binom{2n-(n-k)}{n-k} (n-k)! \, \frac{(2k)!}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,(2k)!} \cdot (n-k)! \, \frac{(2k)!}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{2^k}$$

$n=2$: $+\frac{2!}{1} - \binom{2}{1}\frac{3!}{2} + \binom{2}{2}\frac{4!}{4} = 2-6+6 = 2$ ✓

Existenzaussagen: Schubfachprinzip u. Verallg.

Bsp: Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ (Menge oder Multimenge)

Frage: Existiert Teilmenge $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq A$,
sodass $b_1 + \dots + b_m \equiv 0 \mod n$ (d.h. $n \mid$ Summe)?

z.B. $n = 2$ $\quad a, b$ ✓

$n = 3$ $\quad \underbrace{4, 4}_{}, 5$ $\quad 9$ ✓

Schubfachprinzip (pigeonhole principle): Verteilt man n Elemente auf k Fächer, mit $n > k$, so existiert ein Fach, das mind. 2 Elemente enthält.

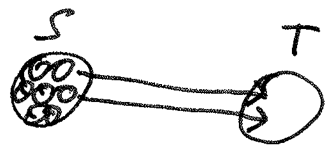
Satz: $f: S \to T$ Abbildung mit $|S| = n$, $|T| = k$, $n > k$
$\Rightarrow \exists t \in T : |f^{-1}(t)| \geq 2$ (d.h. f nicht injektiv)

Satz (Verallgemeinerung):
f wie oben $\Rightarrow \exists t \in T : |f^{-1}(t)| \geq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$

Bem: $n > k$ $\quad \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \geq 1 + 1 = 2$

Bew: ang. $|f^{-1}(t)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \;\forall t$

$$\Rightarrow \underset{n}{\overset{}{|S|}} = \sum_{t \in T} |f^{-1}(t)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \cdot k \leq n - 1 \quad ↯$$



18.10.2007

Schubfachprinzip: $f: S \to T$, $|S| = n > |T| = k$ $\quad \Rightarrow \exists t \in T : |f^{-1}(t)| \geq 2$

$\Rightarrow \exists t \in T : |f^{-1}(t)| \geq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$

ad Bsp: $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$

$\exists B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq A : b_1 + \dots + b_m \equiv 0 \mod n$

wählen $S = \{0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n\}$ $\quad |S| = n + 1$

$T = \{0, 1, \dots, n-1\}$ $\quad |T| = n < |S|$

$f: S \to T$ $\quad f(s) = s \mod n$ (Rest von s mod n)

$\Rightarrow \exists k, l : f(a_1 + \dots + a_k) = f(a_1 + \dots + a_l)$ $\quad$ o.B.d.A. ~~$k < l$~~ $0 \leq k < l$

$a_1 + \dots + a_k = a_1 + \dots + a_l \mod n$

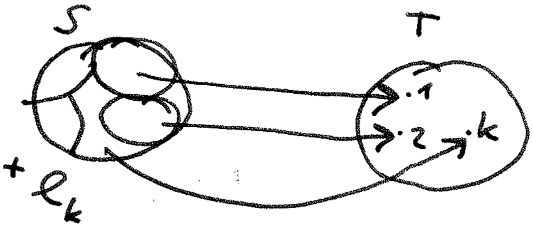
$0 = a_{k+1} + \dots + a_l \mod n$ $\quad$ q.e.d.

Interpretieren f als Färben der Elemente von S, F = Menge der Farben. $|S| = n$ Elemente, $|T| = k$ Farben

<u>Satz</u> (Verallgemeinerung): Sei S Menge mit $|S| = n$, $\ell_1, \dots, \ell_k \geq 1$ mit $n > \ell_1 + \dots + \ell_k - k$.
Dann existiert bei jeder Färbung von S mit Farben $1, \dots, k$ eine Farbe i, sodass (mind.) ℓ_i Element die Farbe i besitzen.

Bew.: $f : S \to \{1, 2, \dots, k\}$ $f(x)$ = Farbe von x

ang. $|f^{-1}(i)| < \ell_i \ \forall i$



$\Rightarrow n = |S| = \sum_{i=1}^{k} |f^{-1}(i)| < \ell_1 + \dots + \ell_k$

$\Rightarrow n \leq \ell_1 + \dots + \ell_k - k < n$ ↯

(gewöhnl. Schubfachprinzip für $\ell_1 = \dots = \ell_k = 2$)

<u>Bsp:</u> $n = 10$ Elt., $k = 3$ Farben

- mind. eine Farbe $2\times$
- —"— $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = 4$ mal
- $\overset{R\ G\ B}{(3, 4, 5)}$ $(3+4+5) - 3 = 9 < 10$ ✓ $\Rightarrow$ mind. $3\times$ rot oder $4\times$ grün oder $5\times$ blau

  $(1, 1, 10)$ $(1+1+10) - 3 = 9 < 10$ ✓ $\Rightarrow$ mind. $1\times$ rot oder $1\times$ grün oder $10\times$ blau

---

Färben nun allg. h-Teilmengen von S, also z.B. für $h = 2$: Paare in S

$\{a, b\} \subseteq S$
$\hat{=}$ Kante zw. a, b

<u>Satz</u> (Ramsey): Zu nat. Z. $k, \ell \geq 2$ gibt es stets eine kleinste Zahl $R(k, \ell)$ (Ramsey-Zahl), sodass gilt: Zu jeder n-Menge S mit $n \geq R(k, \ell)$ und jeder Färbung der Paare von S mit rot und blau existiert eine k-Teilmenge in S, deren Paare alle rot gefärbt sind oder eine ℓ-Menge, deren Paare alle blau gefärbt sind.

z.B. $k = 2$, $\ell = 3 \Rightarrow R(\overset{\text{rot}}{2}, \overset{\text{blau}}{3}) = 3$

$S = \{a, b, c\}$ Färbung der Paare ab, ac, bc

ab, ac, bc
rot rot rot $\{a,b,c\}$
rot rot blau $\{a,b\}$
blau blau blau $\{a,b,c\}$ blau
...

ferner gilt $R(k,2)=k \quad (k \geq 2)$

$R(2,\ell)=\ell \quad (\ell \geq 2)$

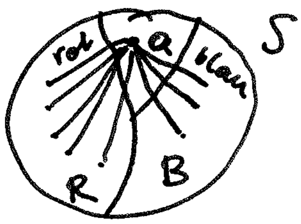
$R(k,\ell)=R(\ell,k)$

Bew: Es gilt $R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$ für $k,\ell>2$

denn S Menge mit $|S|=n=R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$

Paare von S bel. gefärbt mit rot u. blau

sei $a \in S$ fest



$$S\setminus\{a\}=\underbrace{\{x \mid ax \text{ rot}\}}_{R} \cup \underbrace{\{x \mid ax \text{ blau}\}}_{B}$$

$$|R|+|B|=n-1=R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)-1$$

$\Rightarrow \underbrace{|R| \geq R(k-1,\ell)}$ oder $\underbrace{|B| \geq R(k,\ell-1)}_{\text{analog}}$

ang. $R(k-1,\ell)$ existiert bereits

$\Rightarrow \exists\,(k-1)$-Menge in R mit roten Paaren, $a \in S$ $\Big\} \Rightarrow \exists\, k$-Menge in S mit roten Paaren

oder $\exists\,\ell$-Menge in R mit blauen Paaren $\Rightarrow \exists\,\ell$-Menge in S mit blauen Paaren

also existiert $R(k,\ell)$

Induktionsbeweis:

Induktion nach $k+\ell$

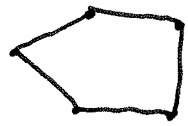
$k \backslash \ell$	2	3	4	5
2	0.	0.	0.	0.
3	0.	1.	2.	3.
4	0.	2.	3.	
⋮	0.	3.		

Beweisreihenfolge

1. nichttrivialer Fall $R(3,3)=?$

Bem: $R(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1} \leq 2^{k+\ell-2}$ (s. Üb.)

$R(3,3) \leq \binom{3+3-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$

$n=5$  erfüllt Bedingung noch nicht

„Unter 6 Pers. gibt es stets 3 Personen, die einander kennen oder 3 Personen, die einander nicht kennen." (Party-Problem)

allg. Ramsey-Zahlen $R(\underset{\text{„Dimension"}}{h}; \underbrace{l_1, \ldots, l_r}_{\text{Farben}})$

$h=2: R(2;k,l) = R(k,l)$

$h=1 \quad R(1;k,l) = k+l-1$

$R(1;l_1,\ldots,l_r) = l_1 + \ldots + l_r - r + 1$

1.2 Ausflug in die komplexe Analysis

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{ z = \underset{\substack{\text{Realteil} \\ Re(z)}}{a} + i\underset{\substack{\text{Imaginärteil} \\ Im(z)}}{b} \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ mit $i^2 = -1$ kartesische Koordinaten

$= \{ z = \underset{|z| \text{ Betrag}}{r}(\cos\underset{\text{Argument, Winkel } Arg(z)}{\varphi} + i \sin\varphi) \; (= re^{i\varphi}) \mid r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi \}$ Polarkoord.

Addition: $z_j = a_j + ib_j \quad j=1,2 \Rightarrow z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

Multiplikation: $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j) \quad j=1,2$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

d.h. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \mod 2\pi$

konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: $z = a+ib \Rightarrow \bar{z} = a-ib$

$\Rightarrow \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \bar{\bar{z}} = z$

$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Satz (Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$): $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Bew: $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$

$$= \underbrace{z_1\bar{z}_1}_{|z_1|^2} + \underbrace{z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1}_{2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)} + \underbrace{z_2\bar{z}_2}_{|z_2|^2}$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

Satz (Moivre'sche Formel):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Lösen $z^n = 1$: $z = ?$ n-te Einheitswurzeln

z.B. $n=3$ $\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1$

$\Rightarrow r = 1$

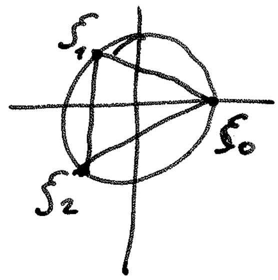
$3\varphi = 0 \mod 2\pi \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$

$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$

$\xi_0 = 1, \ \xi_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \ \xi_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

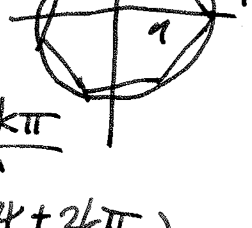
3.-te Einheitswurzeln



19.10.2007

$\mathbb{C}$, $z^n = 1$ $\quad \xi_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

n-ten Einheitswurzeln



Wurzelziehen: $z^n = w$, $z = \sqrt[n]{w} = ?$

wenn $w = R(\cos\psi + i\sin\psi) \Rightarrow z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\psi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi+2k\pi}{n}\right)$

$k = 0, \ldots, n-1$

Bem: es gilt: $z_k = z_0 \cdot \xi_k \quad \forall k$

↑

Hauptwert

Quadratische Gleichungen

z.B. $z^2+2z+2=0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

allg. $z^2+pz+q=0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $z^2+pz+q=(z-z_1)(z-z_2)$

Satz (Fundamentalsatz der Algebra):

Jede algebraische Gleichung $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ $(a_n \neq 0)$ besitzt n Lösungen in $\mathbb{C}$.

$\exists z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} : a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z-z_1) \ldots (z-z_n)$

Potenzreihen

Folge in $\mathbb{C}$: $(z_n)_{n\geq 0}$ mit $z_n \in \mathbb{C}$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: |z-z_n| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \\ \lim \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$

Reihen in $\mathbb{C}$: $\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_0}_{s_0}+a_1}_{s_1}+a_2}_{s_2}+\ldots = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \quad a_i \in \mathbb{C}$

$s_2 \dashrightarrow s$

$\sum\limits_{n\geq 0} a_n = s \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

(d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = s$)

Bsp: geom. Reihe in $\mathbb{C}$: $1+q+q^2+\ldots = \sum\limits_{n\geq 0} q^n$, $q \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1+q+\ldots+q^n \\ q s_n &= \quad q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1} \end{aligned}\right\} -$$

$(1-q)s_n = 1-q^{n+1}$

$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ $\Rightarrow \lim s_n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

$= n+1$ für $q=1$

also $\sum\limits_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

Satz:

$\sum |a_n|$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv. $\Rightarrow \lim a_n = 0$

absolute Konv. hinreichend, aber nicht notwendig

notwendig, aber nicht hinreichend

$1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{9}\ldots = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum\limits_{p \text{ prim}} \frac{1}{p}$ divergent

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\ldots = \log 2$

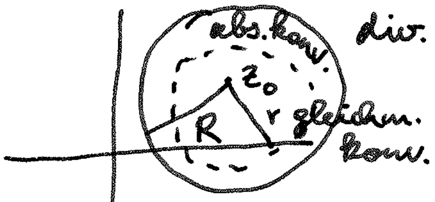
z.B. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$

ferner: Majoranten-, Minorantenkriterium
Wurzelkriterium, Quotientenkriterium
Leibniz'sches Kriterium, Integralkriterium (in $\mathbb{R}$)

Potenzreihen in $\mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad a_n \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$

$= \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad z_0 \in \mathbb{C}$

kompl. Potenzreihe mit Entw.pkt. z_0



R ... Konvergenzradius

Satz: Sei $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ eine komplexe Potenzreihe und

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty] \text{ ihr Konvergenzradius}$$

Dann gilt
(i) $|z-z_0| < R \Rightarrow f(z)$ abs. konv.
(ii) $|z-z_0| > R \Rightarrow f(z)$ divergent
(iii) $|z-z_0| \leq r < R \Rightarrow f(z)$ gleichmäßig konvergent

Bew. (i), (ii)

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} = |z-z_0| \underbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} = \frac{|z-z_0|}{R} \begin{cases} <1 & \text{(i)} \Rightarrow \text{konv.} \\ >1 & \text{(ii)} \Rightarrow \text{divergent} \end{cases}$$

laut Wurzelkriterium

(iii) sei $0 < r < R$, $|z-z_0| \leq r$

$$\Rightarrow \Big|f(z) - \sum_{n\leq N} a_n (z-z_0)^n\Big| = \Big|\sum_{n>N} a_n (z-z_0)^n\Big| \leq \sum_{n>N} |a_n|\,|z-z_0|^n$$

$$\leq \sum_{n>N} |a_n| r^n < \varepsilon$$

da $f(r)$ konv.,
ε unabhängig von z

Bspe: • $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \quad a_n = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

• $f(z) = \sum_{n\geq 0} n^2 z^n \quad a_n = n^2$

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{n^2} = \lim \big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\big)^2 = 1 \Rightarrow R = 1$$

Exponentialreihe in $\mathbb{C}$:

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \approx \sqrt[n]{\frac{1}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \frac{1}{e} \overbrace{\frac{1}{\text{Konst}\,\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}}^{\to 0} \Rightarrow R = \frac{1}{0} = \infty$$

e^z konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

Winkelfkten, Hyperbelfkten

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\underbrace{((i)^n+(-i)^n)}_{\begin{cases}0 & \text{für } n=2k+1 \text{ ungerade}\\ 2i^n=2(-1)^k & n=2k \text{ gerade}\end{cases}}\cancel{\frac{z^n}{n!}}\, z^n$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\dots$$

analog $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\dots$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) = \dots$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = \dots$$

Es gilt: $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, usw. $\to$ Üb.

Ferner gilt $x\in\mathbb{R}$: $\cos x + i\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{i}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) = e^{ix}$

also $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

- Polarkoordinaten $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}$
- $x=\pi$ $\quad e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $e^{i\pi}+1=0$
- $x=2\pi$ $\quad e^{2\pi i} = 1$, $e^{2k\pi i}=1$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

Komplexer Logarithmus

$\log z = ?$ Umkehrfkt. von Exp. fkt.

also $\log z = w \iff e^w = z$

$$e^w = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}$$

$$e^{\operatorname{Re}(w)+i\operatorname{Im}(w)} = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}$$

$$\Rightarrow e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|,\ \operatorname{Re}(w) = \log|z| \quad (z\neq 0)$$

$\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Arg}(z) \bmod 2\pi$, $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Arg}(z)+2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

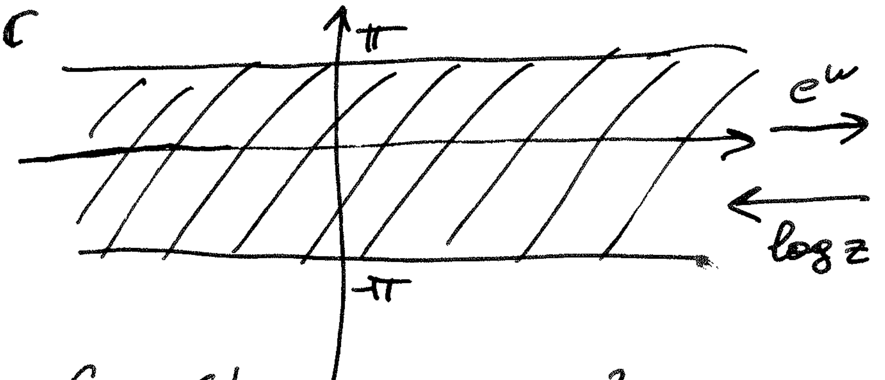
also $\log z = w = \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w)$

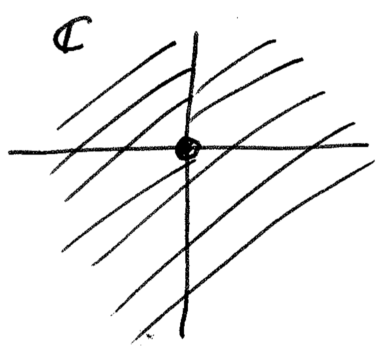
$= \log|z| + i(\operatorname{Arg}(z)+2k\pi i)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

wähle $k=0$, $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$

$\Rightarrow \log z = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ Hauptwert (Hauptzweig)

für $z\neq 0$



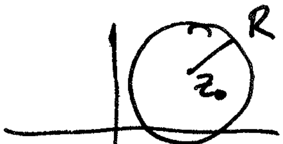


$\{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) \leq \pi\}$ $\qquad$ $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$

(Log. def. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber dort nicht mehr stetig, diffbar)

25.10.2007

$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$



$R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Rechnen mit Potenzreihen

① Addition: $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$

$g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n$

$\Rightarrow f(z) + g(z) = \sum (a_n + b_n)(z - z_0)^n$

② Produkt: f, g wie oben

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) (z - z_0)^n$$

Cauchy-Produkt

Bspe: • $f(z) = g(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-z}$ $\quad |z| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 0} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{n+1} \Big) z^n = \sum_{n \geq 0} n z^{n-1}$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 0} n z^n$$

• Funktionalgleichung der Exponentialfkt.: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ $\quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Bew: $e^z \cdot e^w = \sum_{n \geq 0} \dfrac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n \geq 0} \dfrac{w^n}{n!}$

$$= \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \Big) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}$$ q.e.d.

③ Quotient $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ ang. $h(z) = \sum c_1 (z-z_0)^n$

$h(z) \cdot g(z) = f(z) \Leftrightarrow b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0 = a_n \quad \forall n$

c_n berechenbar $\Leftrightarrow b_0 \neq 0$, d. h. $g(z_0) \neq 0$

④ Komposition

ang. $h(w) = \sum c_n w^n$ und $f(z)$ w.o. mit $a_0 = 0$

setze $f(z) = w$ ein in $h(w)$:

$$h(f(z)) = c_0 + c_1 f(z) + c_2 f^2(z) + \ldots$$

konv. für $|f(z)| < R_c$

⑤ Differenzieren u. Integrieren

$f(z)$ kann gliedweise differenziert u. integriert werden.

<u>Bspe:</u> • $f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$

$$f'(z) = \frac{+1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + \ldots$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots = \sum_{n \geq 0} n z^n$$

• $f(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \ldots \quad (C = 0, \text{ da } \log 1 = 0)$$

für $|z| < 1$

• $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \ldots$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \ldots \quad (C = 0, \text{ da } \arctan 0 = 0)$$

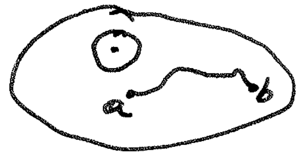
für $|z| < 1$

<u>Differenzieren u. Integrieren</u>

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f: G \to \mathbb{C}$

Gebiet in $\mathbb{C}$ (offen, zusammenhängend)



<u>Def:</u> f heißt komplex differenzierbar (analytisch, holomorph) in $G \Leftrightarrow \forall z_0 \in G : \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$

Bem: $f(z)$ = Polynom, Potenzreihe $\Rightarrow f(z)$ stets diffbar

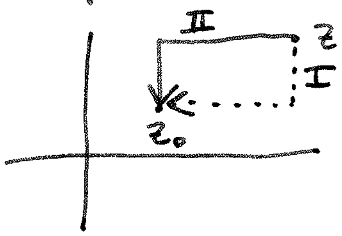
$f(z) = \bar{z}$ nicht diff.bar

Alle Diff.regeln gelten nach wie vor.

$f(z)$ diff.bar $\Rightarrow$ f beliebig oft diff.bar, f in Potenzreihe entwickelbar

sei $z = x+iy$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$



$$\mathrm{I}: f'(z_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\,\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right)$$

$$= u_x + i v_x$$

$$\mathrm{II}: f'(z_0) = \lim_{y\to y_0}\left(\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} + i\,\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}\right)$$

$$= v_y - i u_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}}$$

Cauchy-Riemann'sche Dgl.en
notw. u. hinreichend f. Diffbarkeit

Bsp.: $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underset{u}{(x^2-y^2)} + i\,\underset{v}{(2xy)}$

$u_x = v_y = 2x$ ✓

$u_y = -v_x = -2y$ ✓

$f(z) = \bar{z} = \overset{u}{x} - i\overset{v}{y}$

$u_x = 1,\ v_y = -1$!

Differenzieren von Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad |z| < R$$

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Konvergenzradius von f': $\overline{\lim}\sqrt[n]{n a_n} = \underbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{n}}_{1}\cdot\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$

$\Rightarrow$ Konv.radius von f' auch R

<u>Satz</u> (Identitätssatz f. Potenzreihen):

$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ mit $R>0$ $\Rightarrow$ f bel. oft diff.bar

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ eind. bestimmt

Bew: $f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$

$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\ldots(1)a_k \Rightarrow a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Potenzreihe ist ihre eigene Taylorreihe

Bsp.: sei $\alpha \in \mathbb{C}$

$$f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$$

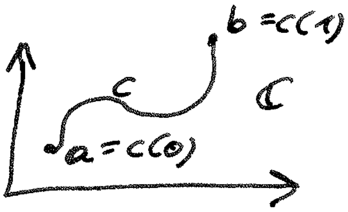
lt. Identitätssatz $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}}{n!}\Big|_{z=0}$

$$= \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n}$$ binomische Reihe

sei $f: G \to \mathbb{C}$

Kurve $c: [0,1] \to \mathbb{C}$, stetig



$c(t),\ 0 \leq t \leq 1$

Def: $\int_c f(z)\,dz := \int_0^1 f(c(t))\,c'(t)\,dt$ heißt komplexes Kurvenintegral von f längs der Kurve c

sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $dz = dx + i\,dy$ $\Big\} \Rightarrow \int_c f(z)\,dz = \int_c (u+iv)(dx+i\,dy)$

$$= \int_c (u\,dx - v\,dy) + i\int_c (v\,dx + u\,dy)$$

$u_x = v_y$

Integrabilitätsbed. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} \Leftrightarrow u_y = -v_x$

autom. erfüllt, falls f komplex diff.bar falls G einfach zus.hängend

Bsp.: $f(z) = z^2$, $c: a \mapsto b$ $(c(0) = a,\ c(1) = b)$

$$\int_c z^2\,dz = \int_c (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx + i\,dy)$$

$$= \int_c (x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_c 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$$

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = -2y = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x}$$

analog

Stammfkt. $U(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ $\qquad V(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$

$$\Rightarrow \int_c z^2\,dz = U + iV = \frac{x^3}{3} + ix^2y - xy^2 - i\frac{y^3}{3} = \frac{(x+iy)^3}{3} = \frac{z^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Satz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ komplex diff.bar, G einf. zushängendes Gebiet, dann gilt

(i) $\int_C f(z)\,dz$ ist unabhängig vom Weg c

(ii) $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ ist komplex diff.bar und $F'(z) = f(z)$

(F heißt Stammfkt. von f)

(iii) $\oint_C f(z)\,dz = 0$, wo c einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$

(Cauchy-scher Integralsatz)

8.11. 2007

Differenzieren $f'(z)$

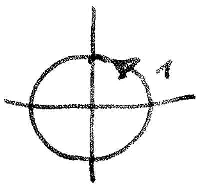
Integrieren $\int_C f(z)\,dz$

Satz: f diffbar $\Rightarrow$ $\int_C$ unabh. von c

$\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ Stammfkt. von $f(z)$

$\oint_C = 0$ Cauchy'scher Int.satz (Integral)

Bsp:



$C: |z| = 1$, $z(t) = e^{2\pi i t}$ mit $0 \le t \le 1$

~~m+1~~ $m \ge 0$: $\oint_C z^m\,dz = \left.\frac{z^{m+1}}{m+1}\right|_{z=1}^{1} = 0$

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} \cdot e^{2\pi i t} \cdot 2\pi i\,dt = 2\pi i$$

Satz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$, G einf. zus.hängendes Gebiet, dann sind folg. Aussagen äquivalent:

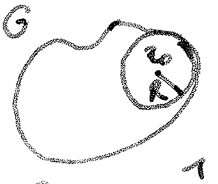
(i) f komplex diff.bar in G

(ii) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$, wo C geschl. Kurve um z_0 $\forall z_0$

(iii) ~~f(z)~~ $f(z) = \sum_{n \ge 0} a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < R$

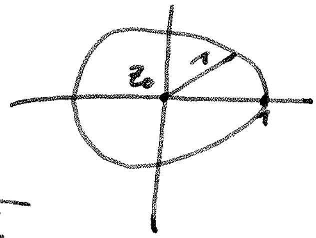
mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$, C w.o. Cauchy-sche Integralformel

Bem: f diff.bar $\Rightarrow$ f bel. oft diff.bar, und in Potenzreihe entwickelbar



R größtmöglicher Radius, sodass Kreis $\subseteq G$

z.B. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

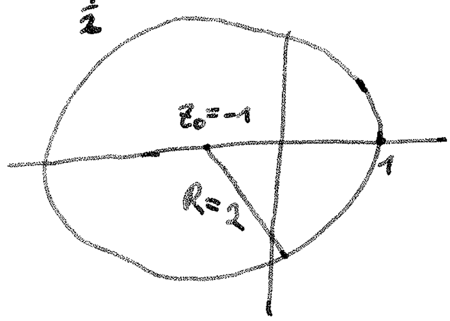


$z_0 = 0$: $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} z^n$ für $|z| < 1$

$z_0 = -1$: $f(z) = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \sum\limits_{n \geq 0} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n$

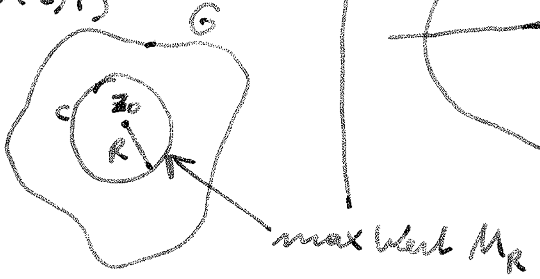
$R = \frac{1}{\underbrace{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}}}_{\frac{1}{2}}} = 2$



__Folgerung 1__ (Cauchy'sche Abschätzung)

$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ für $\{z \mid |z-z_0| < R\} \subseteq G$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M_R}{R^n}$, wo $M_R = \max\limits_{|z-z_0| = R} \{|f(z)|\}$



__Bew:__ $C: z(t) = z_0 + Re^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$

$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right|$

$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z(t))}{R^{n+1} e^{2\pi i t (n+1)}} \cdot Re^{2\pi i t} \cdot 2\pi i \, dt \right| \leq \frac{1}{R^n} \int_0^1 \frac{\overbrace{|f(z(t))|}^{\leq M_R}}{\underbrace{|e^{2\pi i n t}|}_{1}} dt \leq \frac{M_R}{R^n}$

q.e.d.

__Folgerung 2__ (Fundamentalsatz der Algebra):

$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ Polynom vom Grad $n \geq 1$

$\Rightarrow \exists$ mind. eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$: $f(z_0) = 0$

__Bew.:__ ang. $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{f(z)}$ diff.bar in $\mathbb{C}$, beschränkt (durch M)

$= \sum b_n z^n$ mit $|b_n| \leq \frac{M}{R^n} \; \forall R \Rightarrow b_n = 0 \; \forall n \geq 1 \Rightarrow g(z) = b_0$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{b_0}$ ↯

__Rationale Funktionen__

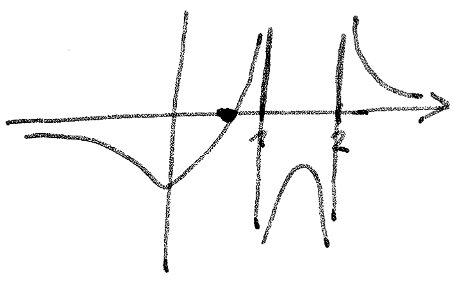
$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ wo p, q Pol. in $\mathbb{C}[z]$, $\mathbb{R}[z]$

z.B. $f(z) = \frac{2z-1}{z^2 - 3z + 2}$

$(z-1)(z-2)$

Nullstellen $\frac{1}{2}$

Polstellen 1, 2



f besitzt <u>Nullstelle</u> z_0 der Ordnung k, falls $p(z) = (z-z_0)^k p_1(z)$ mit $p_1(z_0) \neq 0$

<u>Polstelle</u> z_0 d. Ordnung k, falls $q(z) = (z-z_0)^k q_1(z)$ mit $q_1(z_0) \neq 0$

Partialbruchzerlegung von $\frac{p(z)}{q(z)}$

o.B.d.A. $\operatorname{grad} p(z) < \operatorname{grad} q(z)$ (sonst Pol.division)

ang. $q(z)$ besitzt folgende Nullstellen:

- komplexe Nst. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ d. Ordnung $k_1, \dots, k_r$
- $\begin{cases} \text{reelle Nst. } \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ d. Ordnung } k_1, \dots, k_s \\ \text{konj. komplexe Nst. } \beta_1 \pm i\gamma_1, \dots, \beta_t \pm i\gamma_t \text{ d. Ordnung } l_1, \dots, l_t \end{cases}$

Wurzelfaktoren

- $(z-\alpha)$
- $(z-\beta+i\gamma)(z-\beta-i\gamma) = \dots = z^2+bz+c$

$\Rightarrow q(z) = \text{konst.}(z-\alpha_1)^{k_1} \dots (z-\alpha_r)^{k_r}$ in $\mathbb{C}[z]$

ODER

$q(z) = \text{konst.}(z-\alpha_1)^{k_1} \dots (z-\alpha_s)^{k_s}(z^2+b_1z+c_1)^{l_1} \dots (z^2+b_tz+c_t)^{l_t}$ in $\mathbb{R}[z]$

Dann gilt für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ (mit $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$)

$$f(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z-\alpha_i)^j} \qquad A_{ij} \in \mathbb{C} \qquad \text{Partialbruchzerlegung}$$

ODER

$$f(z) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}z + C_{ij}}{(z^2+b_iz+c_i)^j} \qquad A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$$

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} können stets durch Koeff.vergleich bestimmt werden

<u>Bsp</u>: $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-3z+2} = \frac{2z-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$ Ansatz $A, B = ?$

$$\Rightarrow 2z-1 = A(z-2) + B(z-1)$$
$$= (A+B)z + (-2A-B)$$

$$\left.\begin{array}{ll} z: & 2 = A+B \\ 1: & -1 = -2A-B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3 \end{array} \qquad \text{Also } f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

ODER

$2z-1 = A(z-2) + B(z-1)$

$z=1$: $1 = A \cdot (-1)$, also $A = f(z)\cdot(z-1)\big|_{z=1} = \frac{2z-1}{z-2}\Big|_{z=1} = -1$

$z=2$: $3 = B \cdot (1)$

Grenzwertmethode

Bsp: $f(z) = \frac{4z^2-4}{z^2(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+2} = \ldots = \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z+2}$

Bsp: $f(z) = \frac{z^2+5}{(z+1)(z^2+1)} = \ldots = \frac{3}{z+1} - \frac{1+i}{z-i} - \frac{1-i}{z+i}$ ~~in $\mathbb{C}[z]$~~ über $\mathbb{C}$

ODER $\ldots = \frac{3}{z+1} + \frac{-2z+2}{z^2+1}$ über $\mathbb{R}$

1.3 Erzeugende Funktionen

Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots \longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n = A(z)$

erzeugende Fkt.

z.B. $a_n = 1 \leftrightarrow \sum z^n = \frac{1}{1-z}$

Def: Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann heißt $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (gewöhnliche) erzeugende Fkt. (EF)

$\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ exponentielle erzeugende Fkt. (EEF) der Folge (a_n).

Rechnen mit EF und EEF

sei $(a_n) \longleftrightarrow A(z)$

$(b_n) \longleftrightarrow B(z)$

Dann gilt

(i) $(\alpha a_n + \beta b_n) \longleftrightarrow \alpha A(z) + \beta B(z) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(ii) $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \longleftrightarrow A(z) \cdot B(z)$ Cauchy-Produkt Konvolution

insb. $b_n = 1 \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \longleftrightarrow A(z) \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{A(z)}{1-z}$

Partialsummenfolge

9.11.2007

$a_0, a_1, a_2, \ldots \leftrightarrow A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ EF

$\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ EEF

(iii) $(a_n \gamma^n) \leftrightarrow A(\gamma z) \quad \gamma \in \mathbb{C}$

(iv) $(a_{n-1}) \leftrightarrow z \cdot A(z)$ right shift

(v) $(n \cdot a_n) \leftrightarrow z \cdot A'(z)$

denn $z \cdot A'(z) = z \cdot \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)' = z \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} n a_n z^n$

<u>Bspe:</u> • $\sum (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ vgl. (iii)

• $\sum n z^n = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$ vgl. (v)

• $\sum \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha$ binomische Reihe

<u>Lemma:</u> $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum \binom{n+k-1}{k-1} z^n$ für $k \geq 1$

$k=1$: $\frac{1}{1-z} = \sum z^n$ ✓

$k=2$: $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum \binom{n+1}{1} z^n = \sum (n+1) z^n$ ✓ Bew. s. Üb.

<u>Bsp:</u> $a_n = \sum_{k=0}^{n} k = ?$

$$\sum a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k}_{a_k} \cdot \underbrace{1}_{b_{n-k}} \Big) z^n = \sum n z^n \cdot \sum z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^3}$$

$$= z \cdot \sum \binom{n+3-1}{3-1} z^n = \sum \binom{n+2}{2} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \binom{n+1}{2} z^n$$

also $a_n = \sum_{k=0}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$

sei $(a_n) \longleftrightarrow \hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

$(b_n) \longleftrightarrow \hat{B}(z)$

Dann gilt:

(i) $(\alpha a_n + \beta b_n) \longleftrightarrow \alpha \hat{A}(z) + \beta \hat{B}(z)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(ii) $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \longleftrightarrow \hat{A}(z) \cdot \hat{B}(z)$ Binomialkonvolution (Beweis s. Üb.)

insb. $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) \longleftrightarrow \hat{A}(z) \cdot e^z$ $\quad$ Bsp. $(1) \longleftrightarrow \hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n = e^z$

(iii) $(a_n \gamma^n) \longleftrightarrow \hat{A}(\gamma z)$ $\quad \gamma \in \mathbb{C}$

(iv) $(a_{n+1}) \longleftrightarrow \hat{A}'(z)$ left shift

(v) $(n a_n) \longleftrightarrow z \cdot \hat{A}'(z)$

denn $z \cdot \hat{A}'(z) = z \cdot \Big(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n \Big)' = z \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{n a_n}{n!} z^n$

~~Bsp:~~ / Ungeordnete Komb. Strukturen

betrachten ungeordnete Auswahlen von n Objekten → Komb.

Bsp: Urne mit weißen, gelben, roten Kugeln

Suche Komb. mit folgenden Bedingungen:

- 2 oder 3 weiße Kugeln w^2+w^3
- mind. 1 gelbe Kugel $g^1+g^2+g^3+\dots$ → zugehörigen EF
- höchstens 1 rote Kugel $1+r$

⇒ alle möglichen Komb. mit vorgeg. Bedingungen beschrieben durch EF

$$(w^2+w^3)(g^1+g^2+g^3+\dots)(1+r) = w^2g + w^2gr + w^3g + w^3gr$$

ang. $n=100$ Kugeln → suche alle Terme mit Exponentensumme 100

setze $w=g=r=:z$

$$A(z) = (z^2+z^3)(z+z^2+\dots)(1+z) = \sum a_n z^n$$

a_n: # Komb. von n Kugeln mit obigen Bed.

$$\Rightarrow A(z) = z^2(1+z)\left(\frac{1}{1-z}-1\right)(1+z) = z^2(1+z)^2\frac{z}{1-z} = z^3(1+z)^2\frac{1}{1-z}$$

$$= (z^3+2z^4+z^5)\sum z^n = \sum_{n\geq 3} z^n + 2\sum_{n\geq 4} z^n + \sum_{n\geq 5} z^n$$

$$= z^3 + z^4\cdot 3 + \sum_{n\geq 5} 4z^n \Rightarrow a_0=a_1=a_2=0$$

$a_3=1$

$a_4=3$

$a_n=4$ für $n\geq 5$ (insb. $a_{100}=4$)

Bsp: Wurf mit 2 Würfeln, bilden Augensumme

1. Würfel $a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$

2. Würfel $b+\dots \quad +b^6$

Würfelsumme EF $a=b=z$: $A(z)=\sum a_n z^n$

a_n: # Komb. mit Augensumme n

$$A(z) = (z+z^2+\dots+z^6)^2 = \text{CAS} \dots = z^2+2z^3+4z^4+\dots 6z^7+\dots+z^{12}$$

ODER

$$A(z) = z^2(1+\dots+z^5)^2 = z^2\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^2 = z(1-z^6)^2\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$= (z-2z^7+z^{13})\sum_{n\geq 0} nz^n = \sum_{n\geq 1}(n-1)z^n - 2\sum_{n\geq 7}(n-7)z^n + \sum_{n\geq 13}(n-13)z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{6}(n-1)z^n + \sum_{n=7}^{12}(13-n)z^n + 0 = 1z^2+2z^3+\dots+5z^6+6z^7+5z^8 + \dots + z^{12}$$

$n-1-2(n-7) = 13-n$

$n-1-2(n-7)+(n-13) = 0$

also $a_8=5$ $(2+6=3+5=4+4=3+5=2+6=8)$

Allg. 1. Schritt: kombinatorische Konstruktion
2. Schritt: EF für Anzahlen von Komb.

Bsp: (Komb. ohne Wh.)

N Objekte, wähle n davon aus (jedes Objekt höchstens 1x)

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_N)$$

setzen $a_1 = \dots = a_N = z$: $(1+z)^N = \sum_{n\ge 0}\binom{N}{n} z^n$, also $a_n = \#$ Komb. von n Objekten $= \binom{N}{n}$ für $0 \le n \le N$

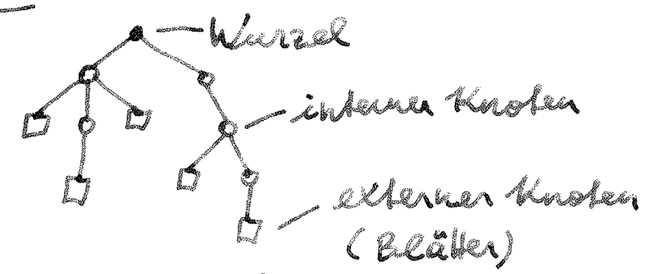
Bsp: (Komb. mit Wh.)

$$(1+a_1+a_1^2+\dots)\dots(1+a_N+a_N^2+\dots) \quad \text{(Auswahl beliebig oft)}$$

setzen $a_1 = \dots = a_N = z$: $(1+z+z^2+\dots)^N = \frac{1}{(1-z)^N} = \sum_{n\ge 0}\binom{n+N-1}{N-1} z^n$

also # Komb. mit Wh. $= \binom{n+N-1}{N-1} = \binom{N+n-1}{n}$ für $n \ge 0$

Bsp (ebene Wurzelbäume)



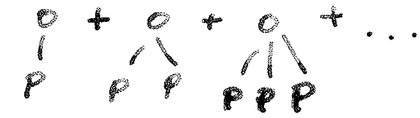
Jeder Knoten hat bel. Anzahl von Nachfolgern, Reihenfolge wesentlich

$n = 11$ Knoten

ges. # aller Wurzelbäume mit $n = 11$ Knoten

Sei $p_n = \#$ Wurzelbäume mit n Knoten, EF $P(z) = \sum p_n z^n$

1. komb. Konstruktion: $P = \circ +$



2. EF: $P(z) = z + zP(z) + zP^2(z) + \dots = \dfrac{z}{1-P(z)}$

$$\Leftrightarrow P(z) - P^2(z) = z, \quad P^2(z) - P(z) + z = 0 \quad \Rightarrow P(z) = \tfrac{1}{2} (\pm) \sqrt{\tfrac{1}{4} - z}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - z\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\ge 1} \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}\right)\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n}_{p_n} z^n$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4z)^{\frac{1}{2}}$$

$p_0 = 0 = P(0)$

es gilt $p_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

Catalanzahlen $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

insb. $p_{11} = \frac{1}{11}\binom{20}{10} = 16796$

$(a_n) \longleftrightarrow$ EF: $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ Lemma: $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum \binom{n+k-1}{k-1} z^n$, $k \geq 1$

EEF: $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

Geordnete komb. Strukturen

Reihenfolge spielt beim Auswählen eine Rolle → Variationen

z.B. 2 Kugeln: g, r Komb. $gr = rg$
 Var. $gr \neq rg$

Bsp: Urne mit w, g, r Kugeln

betrachte geordnete Auswahl mit folg. Einschränkungen:

- 2 oder 3 weiße Kugeln $\frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!}$
- mind. 1 gelbe Kugel $g + \frac{g^2}{2!} + \frac{g^3}{3!} + \dots$
- höchstens eine rote Kugel $1 + r$

zugeh. EEF

zur Anzahlbestimmung setze $w = g = r = z$

EEF $\hat{A}(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a_n = # Variationen von n Kugeln unter geg. Bedingungen

$$\hat{A}(z) = \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)(1+z)$$

$$= \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right)(e^z - 1)(1+z) = \dots = \frac{3}{3!} z^3 + \frac{22}{4!} z^4 + \sum_{n\geq 5} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Bsp: (Variationen ohne Wdh.)

N Objekte, wähle n davon aus (jedes höchstens 1x, mit Berücksichtigung der Reihenfolge)

$1 + a_1, 1 + a_2, \dots, 1 + a_N$

setzen $a_1 = \dots = a_N = z$:

$$\hat{A}(z) = (1+z)^N = \sum_{n\geq 0} \binom{N}{n} z^n = \sum \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} z^n$$

$\Rightarrow a_n = N^{\underline{n}}$ = # Var. o. Wdh. für $0 \leq n \leq N$

Bsp (Variationen m. Wdh.)

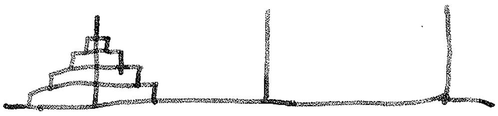
N Objekte, wählen n davon aus (jedes beliebig oft)

$1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} + \dots$, usw.

EEF $\hat{A}(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)^N = (e^z)^N = e^{Nz} = \sum_{n\geq 0} \frac{N^n z^n}{n!}$ $a_n = N^n$ = # Var. m. Wdh. für $n \geq 0$

Lineare Rekursionen

Bsp. (Türme v. Hanoi)



sei a_n = # Schritte bei n Scheiben

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$ für $n \geq 0$

$\Rightarrow a_n = 2^n - 1$

Lsg. mittels EF:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad n \geq 0 \quad / \cdot z^{n+1}$$

$$a_{n+1} z^{n+1} = 2a_n z^{n+1} + z^{n+1} \quad \Big| \sum_{n\geq 0}$$

$$\underbrace{\sum a_{n+1} z^{n+1}}_{A(z) - \underset{=0}{a_0}} = 2 \underbrace{\sum a_n z^{n+1}}_{z \cdot A(z)} + \underbrace{\sum z^{n+1}}_{z \cdot \frac{1}{1-z}}$$

$$A(z) = 2z \cdot A(z) + \frac{z}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$$

Partialbruchzerlegung $\frac{z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z} = \ldots = \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1-2z}$

$$\Rightarrow A(z) = \sum z^n + \sum 2^n z^n = \sum \underbrace{(2^n - 1)}_{a_n \text{ s.o.}} z^n$$

Bsp. (Fibonacci-Zahlen):

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots \qquad F_0 = 0, \; F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad n \geq 0$

EF: $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad / \cdot z^{n+2}, \sum_{n \geq 0}$$

$$\sum F_{n+2} z^{n+2} = \sum F_{n+1} z^{n+2} + \sum F_n z^{n+2}$$

$$F(z) \underbrace{- F_0 - F_1 z}_{-z} = z\big(F(z) \underbrace{- F_0}_{0}\big) + z^2 F(z)$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \qquad 1 - z - z^2 = 0$$

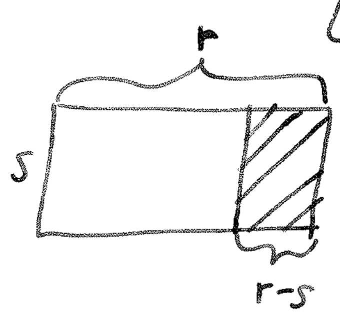
$$z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{A}{z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{wobei } A = \frac{z}{z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \Bigg|_{z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F(z) = \cancel{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n z^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{für } n = 0,1,2$$



$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Goldener Schnitt

Betrachten allg. linear Rekursion d. Form

(*) $a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + \dots + q_k a_n = 0$ für $n \geq 0$

lin. homogene Differenzengl. k-ter Ordnung

$q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}$, $q_k \neq 0$

Anfangswerte: $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$

sei $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ EF der Lösungsfolge $(a_n)_{n\geq 0}$

(*) $\mid \cdot z^{n+k}, \sum_{n\geq 0} \Rightarrow \sum a_{n+k} z^{n+k} + q_1 \sum a_{n+k-1} z^{n+k} + \dots + q_k \sum a_n z^{n+k} = 0$

$$A(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-1} z^{k-1} + q_1 \cdot z(A(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-2} z^{k-2}) + \dots + q_k z^k A(z) = 0$$

$$A(z) \cdot \underbrace{(1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_k z^k)}_{q(z)} = p(z)$$

Polynom vom Grad $\leq k-1$

Nullstellen $z_1, \dots, z_r$ mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$ $(k_1 + \dots + k_r = k)$

$A(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(z-z_1)^{k_1}} + \text{usw.}$$

$$= \frac{\overbrace{-\frac{A_1}{z_1}}^{B_1}}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{\overbrace{\frac{A_2}{z_1^2}}^{B_2}}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^2} + \dots \frac{\overbrace{(-1)^{k_1} \frac{A_{k_1}}{z_1^{k_1}}}^{B_{k_1}}}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{k_1}} + \text{usw.}$$

$$\sum \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \qquad \sum \binom{n+1}{1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \qquad \sum \binom{n+k_1-1}{k_1-1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \text{ (lt. Lemma)}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(B_1 + \binom{n+1}{1} B_2 + \dots + \binom{n+k_1-1}{k_1-1} B_{k_1}\right)}_{P_1(n)} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \text{usw.}$$

Polynom in n vom Grad $\leq k_1 - 1$

$\Rightarrow A(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit $a_n = p_1(n)\left(\frac{1}{z_1}\right)^n + \ldots + p_r(n)\left(\frac{1}{z_r}\right)^n$

wo $p_i(n)$ Polynome in n v. Grad $\leq k_i - 1$

betrachten charakteristisches Polynom von (*):

$\chi(z) = z^k + q_1 z^{k-1} + \ldots + q_k = 0$

das ist das reflektierte Polynom zu $q(z) = q_k z^k + \ldots + q_1 z + 1$

(Reflexion d. Koeff. $i \mapsto k-i$)

dann gilt $q(z) = 1 + q_1 z + \ldots + q_k z^k$

$$= z^k\left(\frac{1}{z^k} + q_1 \frac{1}{z^{k-1}} + \ldots + q_k\right)$$

$$= z^k \cdot \chi\left(\frac{1}{z}\right)$$

ang. $\chi(z)$ besitzt Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$

$\chi(z) = (z-\lambda_1)^{k_1} \ldots (z-\lambda_r)^{k_r}$ $\qquad (\sum k_i = k)$

$\Rightarrow q(z) = z^k\left(\frac{1}{z} - \lambda_1\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{1}{z} - \lambda_r\right)^{k_r} = (1-\lambda_1 z)^{k_1} \ldots (1-\lambda_r z)^{k_r}$

λ Nullstelle von $\chi \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ Nullstelle von q

z.B. $z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = 2$

$2z^2 - 3z + 1 = 2\left(z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{2}$

Also $A(z) = \sum a_n z^n$ mit $a_n = p_1(n)\lambda_1^n + \ldots + p_r(n)\lambda_r^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Nullstellen von χ sind

<u>Satz</u>: Sei (*) $a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + \ldots + q_k a_n = 0$ eine lineare Rekursion k-ter Ordnung mit $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{C}$, $q_k \neq 0$ und dem charakteristischen Polynom $\chi(z) = (z-\lambda_1)^{k_1} \ldots (z-\lambda_r)^{k_r}$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, $k_1 + \ldots + k_r = k$.

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ erfüllt die Rekursion (*).

(ii) Für die EF von $(a_n)_{n\geq 0}$ gilt $A(z) = \sum a_n z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$, wo $q(z) = 1 + q_1 z + \ldots + q_k z^k = (1-\lambda_1 z)^{k_1} \ldots (1-\lambda_r z)^{k_r}$ und grad $p(z) < k$.

(iii) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ besitzt die explizite Darstellung $a_n = p_1(n)\lambda_1^n + \ldots + p_r(n)\lambda_r^n$ wo $p_i(n)$ Polynome vom Grad $< k_i$ sind.

$a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + \ldots + q_k a_n = 0$

1.) EF, Partialbruchzerlegung

2.) Ansatzmethode: $a_n =$ Lin. Komb. (λ_i^n)

Bsp. (ad Fibonacci-Z.):

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \quad n \geq 0$

char. Gleichung $\chi(\lambda)\quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow F_n = \underbrace{p_1(n) \cdot \lambda_1^n + p_2(n) \cdot \lambda_2^n}_{\text{Polynome vom Grad } 1-1=0} = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$

$n=0: \ 0 = C_1 + C_2$

$n=1: \ 1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

„Ansatzmethode"

Bsp.: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad n \geq 0$

also $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ k_1 = 2$

$\Rightarrow a_n = \underbrace{p_1(n)}_{\substack{\text{Grad } 2-1 \\ k_1 - 1}} \cdot \lambda_1^n = (A + Bn) \cdot 2^n$

$A, B \in \mathbb{R}$

Bsp.: $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad n \geq 2$

d.h. $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad n \geq 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$

$a_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n = A\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + B\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

$= \cancel{A^{\frac{n}{2}}}\ A\, 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4}\right) + B\, 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\underbrace{(A+B)}_{C}\cos\frac{n\pi}{4} + \underbrace{(A-B)i}_{D}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

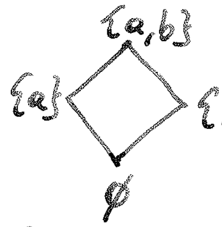
$C, D \in \mathbb{R}$

1.4 Kombinatorik auf Halbordnungen

Halbordnungen

$(\mathbb{N}, \leq)$

Kette



$(P(\{a,b\}), \subseteq)$ keine Kette

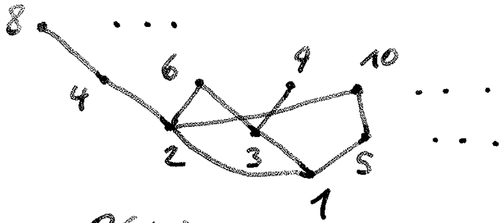
Def: Sei P Menge, $\leq$ binäre Relation auf P.
Dann heißt $(P, \leq)$ Halbordnung, wenn $\forall x,y,z \in P$

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

$(P, \leq)$ heißt Totalordnung (Kette), wenn außerdem

4. $\forall x,y \in P: x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit)

Bspe:
- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ natürliche Ordnung
- $(\mathbb{N}^+, |)$ mit $m|n \Leftrightarrow \exists k : m \cdot k = n$ Teilerrelation

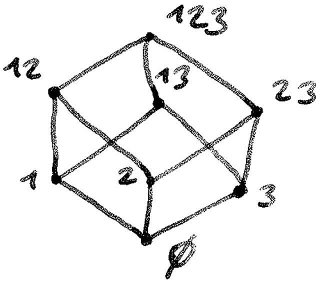


Hassediagramm

b oberer Nachbar

a unterer Nachbar

- (Potenzmenge $P(M)$, $\subseteq$)
  z.B. $M = \{1,2,3\}$



Sei $(P, \leq)$ Halbordnung

$x, y \in P$ vergleichbar oder nicht vergleichbar

$K \subseteq P$ heißt Kette, wenn $(K, \leq)$ Totalordnung

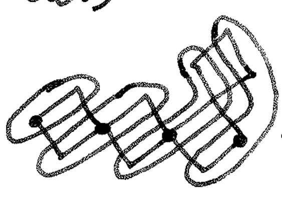
$A \subseteq P$ heißt Antikette, wenn je 2 Elemente von A unvergleichbar

z.B. $(\mathbb{N}^+, |)$ $K = \{1, 2, 4, 8, \ldots\} = \{2^k, k \geq 0\}$

$A = \{2, 3, 5, 7, \ldots\} = \mathbb{P}$ Primzahlen

Satz (Dilworth): Sei $(P, \leq)$ endliche Halbordnung. Dann ist die max. Größe einer Antikette gleich der min. Anzahl disjunkter Ketten, die P überdecken. (o. Bew.)

z.B.



$4 = 4$ ✓

Folgerung (Heiratssatz in bipartiten Graphen)

Seien D, H endl. disjunkte Mengen, $\forall d \in D$ sei $N(d) \subseteq H$ gegeben.

Dann gilt

$\exists$ inj. Fkt. $\varphi : D \to H$ mit $\varphi(d) \in N(d) \iff \forall U \subseteq D : |N(U)| \geq |U|$

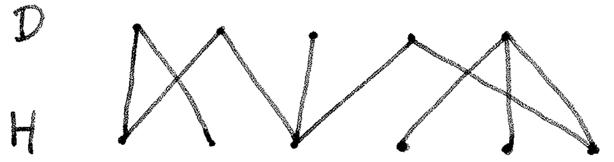
Interpretation: D Damen, H Herren

$N(d)$ Bekanntschaften der Dame d

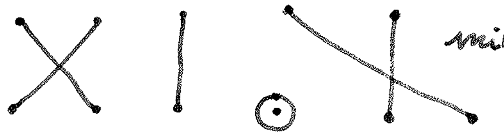
φ max. Matching (jeder Dame wird ein Herr zugeordnet, den sie schon gekannt hat)

$|N(U)| \geq |U|$ Heiratsbedingung

z.B.



$m = 5$, $n = 6$ $\quad |N(U)| \geq |U| \quad \forall U \subseteq D$



min. Überdeckung mit 6 Ketten

Bew: sei $P = D \cup H$, $h \leq d \iff h \in N(d) \quad \forall d, h$

$\Rightarrow (P, \leq)$ HO., wo D und H Antiketten

↳ Halbordnung

($\Rightarrow$) klar $|U| = |\underbrace{\varphi(U)}_{\subseteq N(U)}| \leq |N(U)| \quad \forall U \subseteq D$

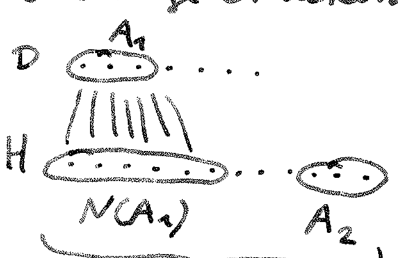
d.h. Heiratsbedingung ist notwendig

($\Leftarrow$) gelte Heiratsbedingung, suche Fkt. $\varphi : D \to H$

$\exists \varphi \iff$ min. # Ketten (die alles überdecken) $= |H|$

$\overset{\text{Dilworth}}{\iff}$ |größte Antikette| $= |H|$

- H Antikette $\Rightarrow$ |größte Antikette| $\geq |H|$
- A beliebige Antikette $A = \underset{\subseteq D}{A_1} \cup \underset{\subseteq H}{A_2}$



$N(A_1) \cap A_2 = \emptyset$!

$$|A| = \underbrace{|A_1| + |A_2| \leq |N(A_1)|}_{\text{Heiratsbed.}} + |A_2| \leq |H|$$

$\Rightarrow$ |größte Antikette| $= |H|$

Möbius - Inversion

Sei $(P, \leq)$ Halbordnung

$m \in P$ minimal (maximal), wenn $\forall x: x \leq m \Rightarrow x = m$
(bzw. $\forall x: x \geq m \Rightarrow x = m$)

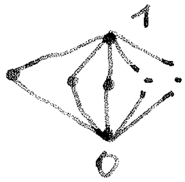
0-Element (1-Element) kleinstes (bzw. größtes) Element in P,
d.h. $\forall x: 0 \leq x$ (bzw. $\forall x: x \leq 1$)

Intervall $[x,y] = [x,y]_P = \{z \in P \mid x \leq z \wedge z \leq y\}$

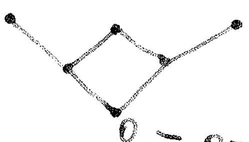
$(P, \leq)$ heißt lokal endlich, wenn alle Intervalle $[x,y]$ endlich sind

Bspe: $(\mathbb{N}, \leq)$ lokalendlich

$(\mathbb{N}^+, |)$ —"—



∞ viele Elemente
nicht lokalendlich



3 maximale Elt.

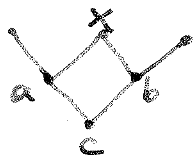
0 – 0-Elt.

betrachten Funktionen $f: P \to \mathbb{R}$

zugehörige Summenfunktion $S_f(x) = \sum_{z \leq x} f(z)$

sinnvoll, falls P lokalendlich mit 0-Elt.

z.B.



$f: P \to \mathbb{R}$ beliebig

$S_f(x) = f(x) + f(a) + f(b) + f(c)$

$S_f(a) = f(a) + f(c)$

$S_f(b) = f(b) + f(c)$

$S_f(c) = f(c)$

Problem: geg. Summenfkt. $S_f(x)$
gesucht: $f(x)$

z.B. $f(c) = S_f(c)$

$f(b) = S_f(b) - f(c) = S_f(b) - S_f(c)$

$f(a) = S_f(a) - S_f(c)$

$f(x) = S_f(x) - f(a) - f(b) - f(c) = S_f(x) - S_f(a) - S_f(b) + S_f(c)$

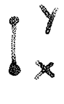
Def.: (Möbius-Fkt. auf Halbordnungen):
Sei $(P, \leq)$ lokalendl. HO mit 0-Elt. Eine Funktion $\mu: P \times P \to \mathbb{R}$ heißt Möbius-Fkt. auf P, falls $\forall x,y$:

$$\sum_{z \in [x,y]} \mu(z,y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

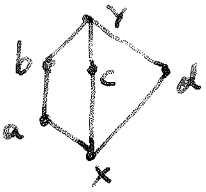
Kronecker-δ

Bem: Es gilt: $\mu(x,y)$ ist durch diese Bedingung stets eindeutig bestimmt. Für $x \not\leq y$ setzen wir $\mu(x,y)=0$.

$[x,x]=\{x\}$ $\quad \mu(x,x)=1$

$[x,y]=\{x,y\}$  $\displaystyle\sum_{z\in\{x,y\}} \mu(z,y)=\mu(x,y)+\underbrace{\mu(y,y)}_{1}=0 \Rightarrow \mu(x,y)=-1$

allg: $x\leq y$, $x\neq y$: $\mu(x,y)=\,?$

z.B. 

$\mu(x,y)=\,?$

$$\mu(x,y)+\mu(a,y)+\underbrace{\mu(b,y)}_{-1}+\underbrace{\mu(c,y)}_{-1}+\underbrace{\mu(d,y)}_{-1}+\underbrace{\mu(y,y)}_{1}=0 \quad \delta_{xy}$$

$\mu(a,y)$: ?

$$[a,y]: \mu(a,y)+\underbrace{\mu(b,y)}_{-1}+\underbrace{\mu(y,y)}_{1}=\delta_{ay}=0$$

$\Rightarrow 0$

$\Rightarrow \mu(x,y)=2$

Bsp: $(\mathbb{N},\leq)$ 

$\mu(n,n)=1$

$\mu(n,n+1)=-1$

$\mu(m,n)=0$ sonst

Satz: $(P_1,\leq_1)$, $(P_2,\leq_2)$ lokalendl. HO mit 0-Elt.

$\Rightarrow P=P_1\times P_2$

$\leq$ def. durch $(x_1,x_2)\leq(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1\leq_1 y_1 \wedge x_2\leq_2 y_2$

$(P,\leq)$ Produkthalbordnung ist wieder lokalendl. mit 0-Elt.

$\mu: P\times P\to\mathbb{R}$: $\mu((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\mu_1(x_1,y_1)\cdot\mu_2(x_2,y_2)$

Also: mit μ_1,μ_2 auf P_1,P_2 ist auch d. Möbiusfkt. μ auf der ProduktHO bekannt. (Bew. $\to$ Üb.)

Bsp: $M=\{a_1,\dots,a_n\}$ $\quad P(M)$ Potenzmenge $\quad (P(M),\subseteq)$ ist lokalendl. HO mit 0-Elt. $(0=\emptyset)$

$P(M)\leftrightarrow\{0,1\}^n$

$(P(M),\subseteq)\leftrightarrow(\{0,1\}^n,\leq)$

komponentenweise definiert

$(x_1,\dots,x_n)\leq(y_1,\dots,y_n)\Leftrightarrow x_i\leq y_i \ \forall i$

z.B. $n=5$ $\quad A=\{a_3,a_4\}\leftrightarrow(0,0,1,1,0)$

$B=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}\leftrightarrow(1,0,1,1,1)$

$A\subseteq B \Leftrightarrow (0,0,1,1,0)\leq(1,0,1,1,1)$

$\leq$ $\quad \leq$ usw.

$A \subseteq B$

$\mu(A,B) = \mu(00110, 10111) = \underbrace{\mu_1(0,1)}_{-1} \cdot \underbrace{\mu_2(0,0)}_{1} \cdot \underbrace{\mu_3(1,1)}_{1} \cdot \underbrace{\mu_4(1,1)}_{1} \cdot \underbrace{\mu_5(0,1)}_{-1}$

$(\{0,1\}, \leq)$ $\qquad = (-1)^2 = +1$

1 $\mu(1,1) = 1$

0 $\mu(0,1) = -1$

allg. gilt für $A \subseteq B$: $\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}$

Satz (Möbius-Inversion): Sei $(P, \leq)$ lokalendl. HO mit 0-Elt., $\mu: P \times P \to \mathbb{R}$ zugeh. Möbiusfkt. Für eine Fkt. $f: P \to \mathbb{R}$ sei die Summenfkt. $S_f: P \to \mathbb{R}$ geg. durch $S_f(x) = \sum_{z \in [0,x]} f(z)$

Dann kann f aus S_f mittels der Umkehrformel

$f(x) = \sum_{z \in [0,x]} S_f(z) \cdot \mu(z,x)$ wiedergewonnen werden.

Bew. $\sum_{z \in [0,x]} S_f(z) \mu(z,x) = \sum_{z \in [0,x]} \left(\sum_{u \in [0,z]} f(u) \right) \cdot \mu(z,x)$

$= \sum_{u \in [0,x]} \sum_{z \in [u,x]} f(u) \mu(z,x) = \sum_{u \in [0,x]} f(u) \underbrace{\sum_{z \in [u,x]} \mu(z,x)}_{\delta_{ux}}$

$= 0 + f(x) \cdot 1 = f(x)$ q.e.d.

Bsp $(\mathbb{N}, \leq)$ $\quad \mu(n,n) = 1$

$\mu(n, n+1) = -1$

$\mu(m,n) = 0$ sonst

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Summenfkt. $S_f(n) = \sum_{z \leq n} f(z) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$

f Folge

S_f Partialsumme der Reihe

$f(n) = \sum_{z \leq n} S_f(z) \mu(z,n) = S_f(n) \cdot 1 + S_f(n-1) \cdot (-1) + 0 = S_f(n) - S_f(n-1)$

Bsp (Inklusions-Exklusions-Prinzip):

betrachten $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ Mengen

$(P(\{1,\ldots,n\}), \supseteq)$ inverse HO der Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$

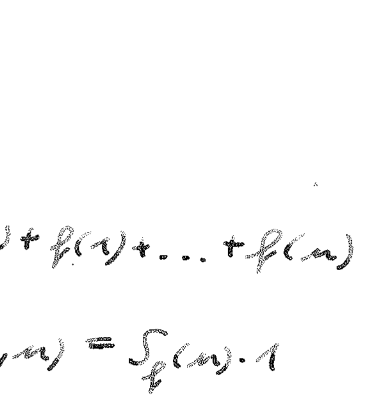
$\Rightarrow J \supseteq I \Rightarrow \mu(J, I) = (-1)^{|J|-|I|}$ (s. oben)

definieren $f: P\{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$

$f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} \overline{A_j} \right|$

Elemente, die in allen A_i ($i \in I$), aber in keinem A_j ($j \notin I$) sind.

z.B.



$f(\{1,3\}) = |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3|$

$\Rightarrow S_f(I) = \sum\limits_{J \supseteq I} f(J) = \left| \bigcap\limits_{i \in I} A_i \right|$

$S_f(\{1,3\}) = \sum\limits_{J \supseteq \{1,3\}} f(J)$

$= f(\{1,3\}) + f(\{1,2,3\})$

$= |A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$= |A_1 \cap A_3|$

$\overset{\text{Möbiusinv.}}{\Longrightarrow} f(I) = \sum\limits_{J \subseteq I} S_f(J) \cdot \mu(J, I)$

$= \sum\limits_{J \supseteq I} \left| \bigcap\limits_{j \in J} A_j \right| \cdot (-1)^{|J| - |I|}$

insb. $I = \emptyset$: $f(\emptyset) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n| = \sum\limits_{J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap\limits_{j \in J} A_j \right|$

$= |M| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - + \ldots$

$\rightarrow$ Inkl.-Exkl.-Prinzip

Bsp (klassische Möbiusfkt. in der Zahlentheorie)

$(\mathbb{N}^+, |)$ $\quad n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r} = \prod p_i^{e_i}$ Primfaktorzerlegung

$n = \prod p_i^{e_i}$, $m = \prod p_i^{f_i}$: $m | n \Leftrightarrow f_i \leq e_i \ \forall i$

z.B. $15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$15 | 60 \Leftrightarrow (0,1,1) \leq (2,1,1)$

$(\mathbb{N}^+, |) \Leftrightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots, \leq)$

2er Potenzen $\quad$ 3er Potenzen $\quad$ komponentenweise def.

$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \quad 1 = p_1^0 \cdots p_r^0$

$\Rightarrow \mu(1, n) = \mu_{\leq}(0, e_1) \cdot \mu_{\leq}(0, e_2) \cdots \mu_{\leq}(0, e_r) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^r & n = p_1 \cdots p_r \text{ (Prod. versch. Primzahlen)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\mu(n)$ <u>die</u> Möbiusfkt.

Umkehrformel von Möbius:

$f(n) = \sum\limits_{d | n} S_f(d) \, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

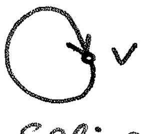
2. Graphentheorie

2.1 Grundlegende Begriffe

Graph $G = (V, E)$

Knoten $\quad$ Kanten $\rightarrow$ gerichtet $e = (v, w)$

$\rightarrow$ ungerichtet $e = \{v, w\} = vw$



Schlinge

Mehrfachkanten

$G = (V, E, f)$

$f: E \rightarrow (V \times V)$

Inzidenzabb.

Notation: $V = V(G)$, $E = E(G)$

$|V| = \alpha_0(G)$, $|E| = \alpha_1(G)$

G heißt schlicht (einfach), wenn G keine Schlingen und keine Mehrfachkanten besitzt.

Knotengrad:

G ungerichtet: $d(v) = \#$ Nachbarn von v : Grad von v

z.B. 

$d(v) = 4$

G gerichtet: $d^+(v) = \#$ Nachfolger von v: Weggrad

$d^-(v) = \#$ Vorgänger von v: Hingrad

z.B. 

$d^-(v) = 1$

$d^+(v) = 2$

__Satz__ (Handschlaglemma):

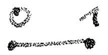
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| \quad G \text{ ungerichtet}$$

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E| \quad G \text{ gerichtet}$$

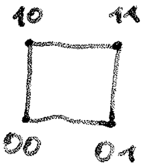
__Bsp:__ Hyperwürfel $Q_n = (\{0,1\}^n, E)$

mit $vw \in E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |v_i - w_i| = 1$

(d.h. Folgen v, w unterscheiden sich an genau 1 Stelle)

$n=1$ 

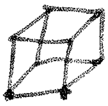
$\#$ Knoten $= |V| = 2^n$

$n=2$ 

$\#$ Kanten: $\sum \underbrace{d(v)}_{n} = 2|E|$

$2 \cdot 2^1 = 4$ $\qquad n \cdot |V| = 2|E|$

$n \cdot 2^n = 2 \cdot |E|$

$n=3$ 
$3 \cdot 2^2 = 12$ $\qquad \Rightarrow |E| = n \cdot 2^{n-1}$

$n=4$ $\quad 4 \cdot 2^3 = 32$ Kanten

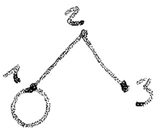
$v \xrightarrow{e} w$ Knoten v, w adjazent

Kante e inzidiert mit v, w

Adjazenzmatrix: $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow A(G) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ $\quad n \times n$-Matrix

wo $a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i, v_j \text{ adjazent, d.h. } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

z.B. 

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bem: • G ungerichtet $\Rightarrow A(G)$ symmetrisch

• $A^k = (a_{ij}^{(k)})$

$\Rightarrow a_{ij}^{(k)} = \#$ Kantenfolgen d. Länge k von v_i nach v_j

z.B. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

z.B. $a_{11}^{(2)} = 2$: $\left. \begin{array}{l} 1 \to 1 \to 1 \\ 1 \to 2 \to 1 \end{array} \right\} 2\times$

Kantenfolge : x_0 , $e_1 = (x_0, x_1)$, $e_2 = (x_1, x_2)$, ..., $e_k = (x_{k-1}, x_k)$, x_k

Kantenfolge von x_0 nach x_k der Länge $k \geq 0$

$KF(x_0, x_k)$

insb. Kantenzug, Weg / Bahn, Kreis / Zyklus

K_2  v_1, v_2, v_1 kein Kreis!

Erreichbarkeitsrelation R auf V:

$v, w \in V(G)$: $v R w \Leftrightarrow \exists KF(v, w)$

w ist von v aus erreichbar

R ist Äquivalenzrelation (falls G ungerichtet)

→ Partition, Klassen = Zusammenhangskomponenten

<u>Bem:</u> $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$

$C = (c_{ij}) = I + A + A^2 + \ldots + A^{\min(m, n-1)}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c_{ij} > 0 \Leftrightarrow v_i R v_j \quad \forall ij$ $\qquad$ A Adjazenzmatrix

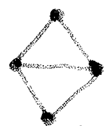
denn $\exists KF(v_i, v_j) \Leftrightarrow \exists KF$ der Länge $\leq m$

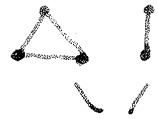
$\Leftrightarrow \exists KF$ der Länge $\leq n-1$

G ungerichtet :

G heißt zusammenhängend, wenn $\forall v, w \in V$: $v R w$

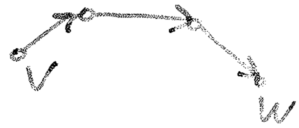
Zusammenhangskomponente = max. zush. Teilgraph

z.B. G_1  zush.

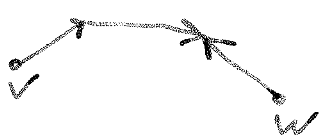
G_2  nicht zush. Komp.

<u>G gerichtet:</u>

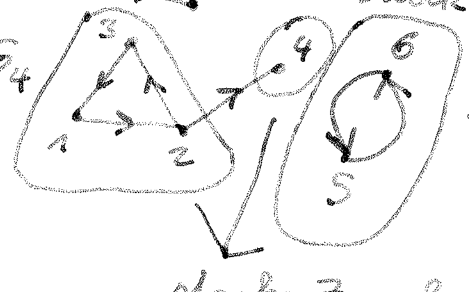
G heißt stark zush., wenn $\forall v, w \in V$: $v R w$



G heißt schwach zush., wenn sein Schatten G_S zus.hängend ist.



z.B. G_3  schwach zush. nicht stark zush.

G_4  nicht stark zush. nicht schwach zush.

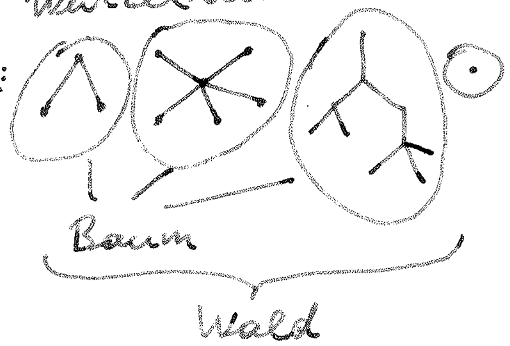
starke Zus.hangskomp.

$K_1 = \{1, 2, 3\}$ $\quad K_2 = 4$ $\quad K_3 = \{5, 6\}$ $\qquad$ „Reduktion" G_R

2.2 Bäume und Wälder

Def: Wald = ungerichteter Graph ohne Kreise
Baum = zusammenhängender Wald
Wurzelbaum = Baum mit einem ausgezeichneten Knoten (= Wurzel)

Bspe:



Lemma: T Baum, $v, w \in V(T)$
$\Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmter Weg $W(v,w)$ von v nach w

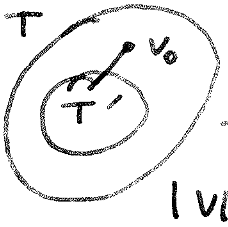
Lemma: T Baum, $|V(T)| \geq 2$
$\Rightarrow \exists$ mind. 2 Knoten v, w mit $d(v) = d(w) = 1$

Folgerung: T Baum $\Rightarrow |V(T)| = |E(T)| + 1$

Bew. durch vollst. Ind. nach $n = |V(G)|$

$n=1$ $\quad \bullet \quad 1 = 0+1$ ✓

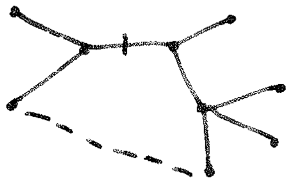
$n \to n+1$



$d(v_0) = 1$
$T' = T \setminus \{v_0\}$ ohne Knoten v_0 und zugeh. Kante
$T = (V, E)$, $T' = (V \setminus \{v_0\}, E')$

$$|V| = |V \setminus \{v_0\}| + 1 = \underbrace{(|E'| + 1)}_{|E|} + 1 = |E| + 1 \quad \text{q.e.d.}$$

lt. Ind.Vor.



T ist minimal zus. hängend
jede Kante ist eine Brücke
T ist maximal kreisfrei

Satz: Für einen Graphen $T = (V, E)$ sind folg. Bed. äquivalent:

(0) T ist ein Baum
(i) T ist zus. hängend und $|V| = |E| + 1$
(ii) $\forall v, w \in V(T)$: $\exists$ genau ein Weg $W(v,w)$
(iii) T ist minimal zus. hängend
(iv) T ist maximal kreisfrei

Für einen Wald gilt:
Sei: F Wald mit k Komponenten $\Rightarrow$
(i) $|V(F)| = |E(F)| + k$
(ii) $\forall v, w \in V(F)$: $\exists$ höchstens ein Weg $W(v,w)$

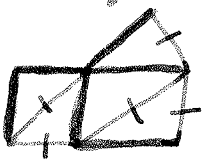
Gerüste

Def: G ungerichteter Graph

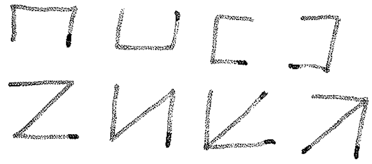
F heißt Gerüst von G $\Leftrightarrow$ (1) $V(F) = V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$
(d.h. F ist Teilgraph von G mit derselben Knotenmenge)
(2) F ist Wald (d.h. kreisfrei)
(3) F hat dieselben Zus.hangskomponenten wie G

allg. Fall: Gerüst = spannender Wald

G zus.hängend: Gerüst = spannender Baum

z.B.  Konstruktion: Entferne bel. Kante aus bel. Kreis, solange wie möglich.

Wie viele Gerüste gibt es?

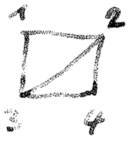
z.B.  :  8 Gerüste

Satz (Matrix-Baum-Theorem v. Kirchhoff):
Sei G ungerichteter, schlichter, zus.hängender Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ferner sei $A(G)$ Adjazenzmatrix und

$$D(G) = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & 0 \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix der Knotengrade.

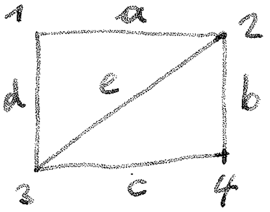
$\Rightarrow$ # spannende Bäume = beliebige $(n-1)\times(n-1)$-Unterdeterminante von $D(G) - A(G)$. (o. Bew.)

Bsp: G 

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(G) = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 = \underline{\underline{8}}$$

Erweiterung:



$$\Rightarrow D(G)-A(G) = \begin{pmatrix} a+d & -a & -d & 0 \\ -a & a+b+e & -e & -b \\ -d & -e & c+d+e & -c \\ 0 & -b & -c & b+c \end{pmatrix}$$

streichen wieder 2. Zeile, 2. Spalte:

$$\begin{vmatrix} a+d & -d & 0 \\ -d & c+d+e & -c \\ 0 & -c & b+c \end{vmatrix} = (a+d)(c+d+e)(b+c) - (b+c)d^2 - (a+d)c^2 = \ldots$$

$$= abc + abd + acd + abe + ace + bcd + bde + cde$$

d.s. alle spannenden Bäume!

Zusatz: Falls G nicht zusammenhängend, dann Satz auf jede Komponente anwenden u. Produkt bilden.

Minimale u. maximale Gerüste

$G=(V,E)$ ungerichteter Graph

Bewertungsfkt. $w: E \to \mathbb{R}$ (zumeist $\mathbb{R}_0^+$)

$e \mapsto w(e)$ Gewicht d. Kante e

$F \subseteq E: w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ Gewicht d. Kantenmenge F

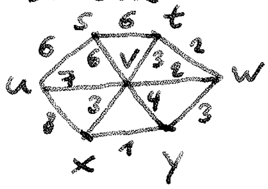
Suchen minimales (oder maximales) Gerüst F in G

(d.h. Gerüst mit min. (max.) Gewicht $w(F)$)

MST-Problem (minimal spanning tree)

z.B. Kommunikationsnetzwerk

suche Verbindungen mit min. Gesamtkosten



Algorithmus v. Kruskal zur Bestimmung eines minimalen Gerüsts eines Graphen $G=(V,E)$ mit nichtnegativer Bewertung $w: E \to \mathbb{R}_0^+$

Schritt 1: Sortiere d. Kanten $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ nach aufsteigendem Gewicht: $w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_m)$

Schritt 2: Kanten d. Reihe nach aufnehmen, so lange kein Kreis entsteht, d.h.

$E' := \emptyset$

for $i := 1$ to m do

  if $(V, E' \cup \{e_i\})$ kreisfrei then $E' := E' \cup \{e_i\}$

end

$\Rightarrow F = (V, E')$ ist Minimalgerüst von G

Bem.:
- Alg. kann nach Aufnahme von $n-k$ ($n = \#$ Knoten, $k = \#$ Komponenten) Kanten abgebrochen werden.
- Alternative: Alg. von Prim