Runde 3, Beispiel 21

LVA 118.181, Übungsrunde 3, 03.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 30.01.2007

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz um $x = 1$:

$$xy' - y - x - 1 = 0$$

1.1 Theoretische Grundlagen: Potenzreihenansatz zur Lösung von Differentialgleichungen

Es liegt eine Differentialgleichung in folgender Form vor:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)} = 0,$$

und wir nehmen an, dass die Lösung $x_0 = x$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h.:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ kann auf zwei Arten erfolgen:

1.2 Fortgesetzte Differentiation

Ausgangspunkt ist das AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Mit der Taylor-Formel gilt:

$$a_m = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!},$$

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ bei $x = x_0$ (Kettenregel) bestimmt man nacheinander die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_0 &= y(x_0) = y_0 \\
a_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) \\
2!a_2 &= y''(x_0) = f_x(y_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) \\
3!a_3 &= y'''(x_0) = [f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx} + f_{yy})y' + f_y y'']_{x_0, y_0} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1.3 Koeffizizentenvergleich

1. Ableitungen bilden:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

2. Potenzen von $y(x)$ $((y(x))^2, (y(x))^3, \dots)$ nach der Cauchy-Produktformel entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot (x - x_0)^n$$
$$h(x) := f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{h_n}_{h_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot g_{n-k}} \cdot (x - x_0)^n$$

3. Reihenentwicklung in Differentialgleichung einsetzen und nach Potenzen von $(x - x_0)^n$ ordnen. Dann die Koeffizienten von $(x - x_0)$ vergleichen, d.h. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ setzen.

   $\Rightarrow$ Gleichungssystem (unendlich dimensional) für $a_0, a_1, \dots$.

   Die Reihenentwicklung wird unter Annahme einer guten Approximation abgebrochen.

2 Lösung des Beispiels

Berechnen zunächst die Lösung der $xy' - y - x - 1 = 0$ zugehörigen homogenen DGL - diese ist $y = x \ln x$.
Wir beachten:

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-1)^n$$
$$y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n$$

Wir setzen ein:

$$(x-1)y' + y' - y + x + 1 - 2 = 0$$
$$\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} (x-1)^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n - \sum_{n \geq 0} a_n (x-1)^n - (x-1) - 2 = 0$$

$$[y^0] \qquad 1a_1 - a_0 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = a_0 + 2$$
$$[y^1] \qquad 1a_1 + 2a_2 - a_1 - 1 = 0$$
$$n > 1 \; [y^n] \qquad na_n + (n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (n+1)a_{n+1}? - (n-1)a_n$$

Mittels Rekursion ausrechnen;

$$a_1 = a_0 + 2$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_{n+1} = \frac{-(n-1)}{n+1}a_n = \frac{-(n-1)}{n+1}\frac{-(n-2)}{n}a_{n-1} = \frac{-(n-1)!(-1)^{n-1}}{n+1}a_2 = \frac{a_2(-1)^{n-1}}{(n+1)n}a_2 = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n}$$

Lösung dann:

$$y(x) = x \ln x + \dots$$