Mathematik III

Vorlesung 13, 26.01.2007 (letzte VO)

Markus Nemetz

Jänner 2007

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
26.01.2007

2 Ergänzungen zum Begriff '*absolut integrierbar*'

Die Behauptung, dass bei einer absolut integrierbaren Funktion $f(t)$ gelte

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

ist i.A. falsch.

Damit diese Behauptung gilt. müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $f(t)$ absolut integrierbar
2. $f(t)$ stetig
3. $f'(t)$ absolut integrierbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| \,\mathrm{d}\, t = c \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \,\mathrm{d}\, t = \check{c}$$

4. $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar.

Dan gilt: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

Allgemein gilt:

$$|f(t)| = f'_+(t) + |f'_-(t)|$$
$$lim_{t\to\infty} f(t) - lim_{t\to-\infty} f(t) = \breve{c}$$

3 Lineare PDG 1. Ordnung (Buch S. 364ff)

$$\begin{gathered} a_1(x_1,\dots,x_n)u_{x_1} + a_2(x_1,\dots,x_n)u_{x_2} + \dots + \\ +a_n(x_1,\dots,x_n)u_{x_n} + c(x_1,\dots,x_n)u + d(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ a_1(\vec{x})u_{x_1} + a_2(\vec{x})u_{x_2} + \dots + a_n(\vec{x})u_{x_n} + c(\vec{x})u + d(\vec{x}) = 0 \end{gathered}$$

Für Funktion $u = u(x_1,\dots,x_n)$.

Sonderfall: $c = d = 0$ - 'Rumpf'-DGL:

$$a_1(x_1,\dots,x_n)u_{x_1} + a_2(x_1,\dots,x_n)u_{x_2} + \dots + a_n(x_1,\dots,x_n)u_{x_n} = 0$$

Betrachten in Systemen von linearen DGL 'gekoppelte' Grössen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, beschierben durch ein System von DGL:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2(t) &= v_2(t, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= v_n(t, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(t, \vec{x})$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme: Wenn das Vektorfeld $\vec{v}(t, \vec{x})$ für alle $a < t < b$ und für alle $\vec{x}$ im Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig partiell nach $x_1, \dots, x_n$ differenzierbar ist, dann besitzt das AWP

$$\dot{\vec{c}}(t) = \vec{v}(t, \vec{x}), \qquad \dot{\vec{c}}(t_0) = \vec{x}_0$$

genau eine (maximale) Lösung.

Betrachten autonomes DGL-System (hängt nicht von t ab) und setzen voraus, dass $\vec{v}(\vec{x})$ stetigt nach $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzeirbar ist für $\vec{x} \in D$:

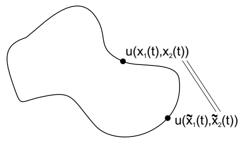
$$\vec{x} = \vec{v}(\vec{x})$$

Nach dem EE-Satz gibt es für jedes $\vec{a} \in D$ eine Lösungskurve, die für $t = 0$ durch $\vec{a}$ geht. 'Notation'

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, \vec{a})$$

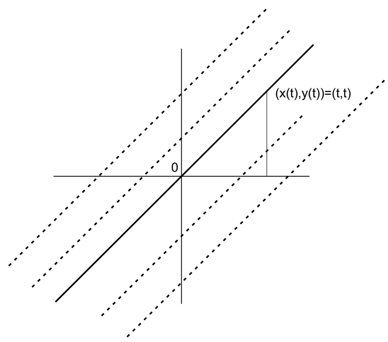
Dabei ist $\Phi(t, \vec{a})$ die Lösungskurve.

Definition: Eine Funktion $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral (=Invariante)**des DGL-Systems $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$, falls $u(\vec{a}) = u(\Phi(t, \vec{a}))$ für alle $\vec{a} \in D$, d.h. u ist konstant entlang jeder Lösungskurve:



Beispiel: $\dot{x} = 1, \dot{y} = 1$, $x(0) = 0, y(0) = 0$. Lösen $x(t) = t + c$ und ergibt $c = 0$ (wegen $(x(0) = 0)$ und daraus $x(t) = t$. Analog $y(t) = t$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$



Behauptung: $y - x$ ist erstes Integral. $u(x(t), y(t)) = t - t = 0$.
Allgemein gilt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = t + d - (t + c) = d - c = \text{const.}$$

'Methode' zum Finden eines möglichst allgemeinen ersten Integrals:

System der Phasen-DGL$(n-1)$ $\dfrac{\mathrm{d}\, x_1}{\mathrm{d}\, x_n} = \dfrac{v_1(\vec{x})}{v_n \vec{x}}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}\, x_{n-1}}{\mathrm{d}\, x_n} = \dfrac{v_{n-1}(\vec{x})}{v_n \vec{x}}$

Aus den ersten $n-1$ Gleichungen gewonnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) &= v_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Annahme: $v_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Nach dem Hauptsatz impliziter Funktionen lösen wir x_n nach t auf, d.h. $t = x_n(t)$.

Nun ersetzen wir t überall durch x_n und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(x_n(t)) = x_1 \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= x_{n-1}(x_n(t)) = x_{n-1} \end{aligned}$$

Ergibt allgemeine Lösung mit frei wählbaren Parametern $c_1, \dots, c_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x_1(x_n) &= g_1(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ x_2(x_n) &= g_2(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(x_n) &= g_{n-1}(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \end{aligned}$$

Weiter gilt: Wir können nach $c_1, \dots, c_{n-1}$ auflösen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ c_2 &= \varphi_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Es gilt: $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x})$ sind unabhängige erste Integrale von $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}(t))$.

Allgemein gilt: $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_k(\vec{x})$sind erste Integrale - dann ist

$$F(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_k(\vec{x}))$$

erstes Integral für jede k-stellige, differenzierbare Funktion.

Beispiel: $u(x, y) = y - x = \text{const.}$: Daraus folgt dass

$$F(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))$$

i.A. ein erstes Integral von $\vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$.

Weiteres Beispiel: Gegeben sei die Rumpf-DGL

$$a_1(\vec{x})u_{x_1} + a_2(\vec{x})u_{x_2} + \cdots + a_n(\vec{x})u_{x_n} = 0$$

begründet folgendes charakteristische DGL-System für eine Rumpf-DGL $\vec{a})(a_1, \ldots, a_n)^T$:

$$\dot{x}_1(t) = a_1(\vec{x})$$
$$\dot{x}_2(t) = a_2(\vec{x})$$
$$\vdots \dot{x}_n(t) = a_n(\vec{x})$$

Dieses System kann man kürzer mit $\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x})$ anschreiben.

Es gilt folgender Satz: Sei $U \in G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige, nach $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbare Funktion. Dann gilt, dass $u(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung der Rumpf-DGL und ist erstes Integral des charakteristischen DGL-Systems.

Beispiel: $yu_x = xu_y$ - setzen $y = x$ und $x = y$ und erhalten nach $\dot{x} = y$ und $\dot{y} = x$ die trennbare Phasen-DGL:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x\,\mathrm{d}\,x = y\,\mathrm{d}\,y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}_{\varphi(x,y)} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Allgemeines erstes Integral:} \qquad F(\varphi_1(x,y)) = F(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$$

Die allgemeine Lösung lautet: $u(x,y) = F(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$.

Allgemein für $n - 2$:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + cu + d = 0$$
$$\text{Subst. } (x,y) \mapsto (\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$$
$$u(x,y) = U(\xi,\eta), a(x,y) = A(\xi,\eta), b(x,y) = B(\xi,\eta)$$
$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$
$$u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$
$$A(\xi, eta)(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + B(\xi, eta)(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) + c(\xi,\eta)U + D(\xi, eta) = 0$$
$$\underbrace{(A\xi_x + B\xi_y)}_{\blacktriangledown} U_\xi + (A\eta_x + B\eta_y)u_\eta + CU + D = 0$$

Wählen in ▼ ξ so, dass $A\xi_x + B\xi_y = 0$ (zugehörige Rumpf-DGL) - da dieser Term dann wegfällt ensteht eine gewöhnliche DGL.

η kann beliebig gewählt werden in Hinblick auf:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$