369) $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+1}{n^4+2}$

370) $\sum_{n\geq 0} \frac{n+3}{7n^2-2n+1}$

371) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{3^n}$

372) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!}$

373–374) Man berechne unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe:

373) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

374) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

375–378) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

375) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$

376) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+5n}$

377) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$

378) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+3)^{4/3}}$

379) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ konvergiert.

380) Gilt Bsp. 379) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

381) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^3$ konvergiert.

382) Gilt Bsp. 381) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

383) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+1} - a_n)$.

384) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+2} - a_n)$.

385) Es sei $\lim a_n = 0$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(a_{n+1} + a_n)$.

386–389) Man zeige, daß die folgende Funktionenreihen im jeweils angegebenen Bereich konvergieren:

386) $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad |x| < 1$

387) $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4}$

388) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

389) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

390–391) Man untersuche, welche o-, O- und $\sim$-Beziehungen zwischen den Folgen a_n, b_n und c_n bestehen.

390) $a_n = 2n$, $b_n = \frac{n^2}{2}$, $c_n = \frac{3n^4}{6n^2+1}$.

391) $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{8n^2}{4n^3+1}$.

392–393) Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Anzahlen der Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

392) $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

393) $\binom{n+k-1}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

394) Zeigen Sie die folgende asymptotische Beziehung für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

$$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^k + O(n^{k-1}).$$

395–396) Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

395) $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

396) $\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}$

397) Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $2.7n^2 - 0.5n + 1$,

(b) $0.35 \cdot 2^n + 5n^5$,

(c) $\sqrt{1 + 1.1n^2}$.

Ferner zeige man, dass

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

398–399) Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

398) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(x-1)^n$

399) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$

400) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

401) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{n!}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

402) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

403) Man leite die unendlichen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch Entwicklung der beiden Funktionen in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her.

404) Man approximiere die Funktion $f(x) = 8(x+1)^{3/2}$ in eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$. Wie groß ist jeweils der Fehler an der Stelle $x = 1/2$?

405–408) Die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

405) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

406) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

407) Man beweise die Formel $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

408) Man beweise die Formel $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

409) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (x^2+1)\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

410) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1-x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

411–414) Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist. ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$.)

411) $f(x) = (x - \pi/2)\operatorname{sgn}(\cos x)$ **412)** $f(x) = (x^2-1)\operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$

413) $f(x) = x\operatorname{sgn}(\sin x)$ **414)** $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}(x)\right)$

415–418) Man zeige, daß die folgenden Funktionen stetige Umkehrfunktionen haben und bestimme diese:

415) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^3}$, $D_f = (1,\infty)$ **416)** $g(x) = (1+\sqrt{x})^7$, $D_g = (0,\infty)$

417) $f(x) = \dfrac{1-x^7}{x^7}$, $D_f = (1,\infty)$ **418)** $g(x) = (1+\sqrt{x})^5$, $D_g = (0,\infty)$

419) Sei $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$, $f(a) > a$ und $f(x) \neq x$ für $0 < x < a$. Man zeige, daß dann auch $f(x) > x$ für $0 < x < a$ gilt.

420) Man zeige, daß es zu jeder stetigen Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ wenigstens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

421) Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad f_4(x) = |\cos x|, \quad f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$

im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

422) Man skizziere den Verlauf der Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ und beweise, dass $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert besitzt, indem man die beiden Folgen $x_n = 1/(n\pi)$ und $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ betrachtet.

423) Man berechne die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

424) Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass die Funktion $y = e^{x/2} - 4x + 1$ im Intervall $[0,1]$ sowie im Intervall $[6,7]$ je eine Nullstelle besitzt. Wie können diese Nullstellen näherungsweise berechnet werden?

425) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1/2}(1-2x)\tan(\pi x)$

426–431) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

426) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-5x+2}}$ **427)** $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)$

428) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-6x+3}}$ **429)** $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt[4]{x^2-2}\right)$

430) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}}$ **431)** $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

432–433) Man zeige mittels Differenzieren:

432)

$$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1,1)$$

433)

$$\operatorname{Arcsin}x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad x \in (-1,1)$$

434) Zeigen Sie: Sind $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle j, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^m g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^m g_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}.$$

435) Wie ist t zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2+t)/(x-t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

436) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi,\pi]$.

437) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

438) Folgt in Bsp. 437) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

439) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

440) Folgt in Bsp. 439) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

441) Für die Funktion $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

442) Wie 441) für $f(t) = \begin{cases} -2 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$.