Analysis I Übung - Blatt 2, für den 27.10.2022

9. Sei K ein Körper und $M \subset K$ eine Menge sodass gilt:

   (a) $0 \notin M$

   (b) $\forall x \in K, x \neq 0 : x \in M \Leftrightarrow -x \notin M$

   (c) $\forall\, x, y \in M : x + y \in M \ \wedge \ xy \in M$

   Wir definieren nun auf $K \times K$ die Relationen

$$x < y \ :\Leftrightarrow \ y - x \in M$$

   und $x \leq y :\Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.
   Zeigen Sie: $(K, \leq)$ ist ein angeordnerter Körper (nach Def 2.4 und Def 2.6).

   Beweis: Damit $(K, \leq)$ ein angeordnerter Körper ist, muss $(K, \leq)$ Bedingungen (O1) bis (O4), sowie (OK1) und (OK2) erfüllen. Seien $x, y, z \in K$ beliebig, dann gilt:

(O1): Da aus $x = x$, $x \leq x$ folgt, gilt *Reflexivität.*

(O2): Es gelte $x \leq y$ und $y \leq z$.

$$\begin{aligned}
(x = y) \wedge (y = z) &\Rightarrow x = z \Rightarrow x \leq z \\
(x = y) \wedge (y < z) &\Rightarrow x < z \Rightarrow x \leq z \\
(x < y) \wedge (y = z) &\Rightarrow x < z \Rightarrow x \leq z \\
(x < y) \wedge (y < z) &\Rightarrow y - x \in M \wedge z - y \in M \\
&\Rightarrow y - x + z - y = z - x \in M \Rightarrow x \leq z.
\end{aligned}$$

(O3): Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es sei $x \leq y$, $y \leq x$ und $x \neq y$, dann gilt

$$x < y \wedge y < x \Leftrightarrow y - x \in M \wedge x - y \in M \Rightarrow y - x + x - y = 0 \in M.$$

Das ist ein Widerspruch zu (a) und somit muss $x = y$.

(O4): Beweis durch Widerspurch. Anngenommen es existieren $x, y \in K$, die nicht in Relation zueinander stehen, also insbesondere $x \neq y$. O.B.d.A nehmen wir an, dass $\neg(x < y)$, also $y - x \notin M$. Nach (b) muss aber dann $-(y-x) = (x-y) \in M$ gelten. Also muss x in Relation zu y stehen, ein Widerspruch.

(OK1): Sei $x < y$, dann gilt $y - x \in M$ und für beliebige $z \in K$

$$x + z < y + z \qquad \Leftrightarrow \qquad y - x = y + z - x - z \in M.$$

(OK2): Seien $x > 0$ und $y > 0$, dann gilt, dass $x, y \in M$ und somit nach Voraussetzung (c) auch $xy \in M$. Also ist auch $xy - 0 \in M \ \Leftrightarrow \ xy > 0$.

$\square$

10. Sei $(K, \leq)$ ein angeordnerter Körper. Zeigen Sie:

$$\forall a, b \in K, a > 0, b > 0 : (\tfrac{1}{2}(a^{-1} + b^{-1})^{-1} < \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Rechenregeln basierend auf den Körperaxiomen und Ordnungsaxiomen können ohne Referenz verwendet werden, bei Rechenregeln basierend auf den Verträglichkeitsaxiomen geben Sie genaue Referenzen aufs Skript an.

Beweis: Zuerst formen wir $a^{-1} + b^{-1}$ um:

$$a^{-1} + b^{-1} = a^{-1}(bb^{-1}) + b^{-1}(aa^{-1}) = a^{-1}b^{-1}(a + b)$$

Da $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ erhalten wir

$$(\tfrac{1}{2}(a^{-1}+b^{-1}))^{-1} = (a^{-1}+b^{-1})^{-1}2 = (a^{-1}b^{-1}(a+b))^{-1}2 = (a+b)^{-1}(a^{-1}b^{-1})^{-1}2 = (a+b)^{-1}ab2$$

Somit

$$(\tfrac{1}{2}(a^{-1} + b^{-1})^{-1} < \tfrac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow 2ab(a + b)^{-1} < \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Aus $a > 0$, $b > 0$ und Satz 2.7(a) folgt $a + b > 0$, das zusammen mit Satz 2.7(b)

$$2ab(a + b)^{-1} < \tfrac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow 2ab < \tfrac{1}{2}(a + b)^2 \Leftrightarrow 0 < \tfrac{1}{2}(a + b)^2 - 2ab = \tfrac{1}{2}(a - b)^2$$

wobei die letzte Äquivalenz wegen (OK1) gilt. $\square$

11. Sei $(M, \leq)$ eine linear geordnete, endliche Menge.

   (a) Man zeige: M besitzt ein größtes Element. Hinweis: Vollständige Induktion bzgl. der Mächtigkeit von M.

   (b) Man schließe daraus: Es gibt keinen angeordneten, endlichen Körper.

   Beweis:

   (a) Sei $\#M$ die Anzahl der Elemente in M. Sei $E(n)$ die Aussage:

   $$\#M = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists m \in M : \forall x \in M : x \leq m.$$

   Induktionsanfang $E(1)$: Für $M = \{m\}$ gilt aufgrund der Reflexitivität der Ordnungsrelation (O1):

   $$m \leq m.$$

   Somit ist m das gesuchte maximale Element.

Induktionsschritt $E(n) \Rightarrow E(n+1)$: Sei $x \in M$, mit $\#M = n+1$, beliebig. Da die Menge $M_1 := M \setminus \{x\}$ Mächtigkeit n hat, existiert ein maximales Element $m \in M_1$, mit $y \leq m$, für alle $y \in M_1$. Aufgrund der Vergleichbarkeit (O4) der linearen Ordnung gilt

$$x \leq m \vee m \leq x$$

1.Fall: $x \leq m$
Dann ist m auch maximales Element der Menge M, da $\forall y \in M : y \leq m$.
2.Fall: $m \leq x$
Dann ist x maximales Element der Menge M, da aufgrund der Transitiviät der Ordnungsrelation (O2) für alle $y \in M_1$ folgt

$$y \leq m \wedge m \leq x \Rightarrow y \leq x$$

(b) Beweis durch Widerspruch. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter endlicher Körper. Dann ist $(K, \leq)$ auch eine linear geordnete endliche Menge und besitzt laut (a) ein maximales Element m. Aus (OK1) und Satz 2.7(d) folgt

$$0 < 1 \Rightarrow m < m + 1 \in K,$$

und damit ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass m maximal ist.

$\square$

12. Es seien A, B nicht-leere, beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und

$$C := \{2a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie:

$$\sup C = 2 \sup A - \inf B$$

Beweis: Sei $m = 2 \sup A - \inf B$. Dann ist zu zeigen, $i)$ dass m eine obere Schranke von C ist und $ii)$ dass es die kleinste obere Schranke ist.

i) Seien $a \in A, b \in B$. Dann gilt $a \leq \sup A$ und $b \geq \inf B$. Daraus folgt sofort

$$2a - b \leq 2 \sup A - \inf B = m,$$

also ist m eine obere Schranke von C.

ii) Sei nun s eine beliebige obere Schranke von C. Es gilt also für alle $a \in A, b \in B$ dass $s \geq 2a - b$. Insbesondere gilt für alle $b \in B$

$$\forall a \in A : \tfrac{s+b}{2} \geq a,$$

also ist $\frac{s+b}{2}$ eine obere Schranke von A. Da $\sup A$ die kleinste obere Schranke von A ist folgt $\frac{s+b}{2} \geq \sup A$.
Da b beliebig war gilt nun

$$\forall b \in B : b \geq 2 \sup A - s,$$

also ist $2 \sup A - s$ eine untere Schranke von B und damit auch $2 \sup A - s \leq \inf B$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass für jede obere Schranke s von C

$$s \geq 2 \sup A - \inf B = m$$

gilt.

$\square$

13. Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie dafür

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$

Beweis: Wir beweisen vorerst zwei Hilfsaussagen.

Lemma 1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

- $x \leq |x|$,
- $|x| = |-x|$.

Beweis: Wir starten mit dem Beweis der Ungleichung und unterscheiden 2 mögliche Fälle:
1. Fall: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x$ und damit auch $x \leq |x|$.
2. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x > 0 > x$, also $x \leq |x|$.
Der Beweis der zweiten Aussage erfolgt ebenfalls mittels Fallunterscheidung.
1. Fall: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x = -(-x) = |-x|$.
2. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x = |-x|$. $\square$

(a) Sei nun $x + y \geq 0$, dann gilt

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Ist $x + y < 0$, so folgt

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$$

und damit die Behauptung aus (a).

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt, dann gilt

$$
\begin{aligned}
|x| = |x + y - y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|, \\
|y| = |y + x - x| \leq |y - x| + |x| \implies |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.
\end{aligned}
$$

Insgesamt also $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

$\square$

14. Die Betragsfunktion $| \cdot | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{wobei} \quad z = a + ib \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie dafür

(a) $\forall x, y \in \mathbb{C} : |xy| = |x|\,|y|$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis:

(a) Seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$
\begin{aligned}
|xy| &= |(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)| \\
&= \sqrt{(x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_1^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2) + (x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2)} \\
&= \sqrt{x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} \\
&= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \\
&= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}\sqrt{(y_1^2 + y_2^2)} = |x||y|.
\end{aligned}
$$

(b) Seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& |x + y| \leq |x| + |y| \\
\iff \quad & \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\
\iff \quad & (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2) + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + (y_1^2 + y_2^2) \\
\iff \quad & 2x_1y_1 + 2x_2y_2 \leq 2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \\
\iff \quad & x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} \\
\iff \quad & x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 \leq x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
\iff \quad & 2x_1y_1x_2y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
\iff \quad & 0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile der obigen Äquivalenzumformungen entspricht einer wahren Aussage, womit (b) bewiesen wäre.

□

15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig falls gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall\, x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$$

(a) Sind die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig?

(b) Zeigen Sie : Falls $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen sind, dann ist auch die Summenfunktion $f + g$ Lipschitz-stetig.

Beweis:

(a) Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y|.$$

Die Funktion ist also Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante $c = 1$.
Sei $c > 0$. Dann folgt mit $x := c$ und $y := c + 1$

$$|f_2(x) - f_2(y)| = |c^2 - c^2 - 2c - 1| = 2c + 1 > c|x - y| = c.$$

f_2 kann also nicht Lipschitz-stetig sein.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig und c_f bzw. c_g die Lipschitz-Konstanten von f und g. Mit Hilfe vom Beispiel 13 gilt

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq c_f|x - y| + c_g|x - y| = (c_f + c_g)|x - y|. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt also mit $c := c_f + c_g$.

□

16. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$T_0(x) := 1, \qquad T_1(x) := x$$

und

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $x \mapsto T_n(x)$ ein Polynom vom Grad n.

(b) Plotten Sie die Funktionen T_n für $n = 0, \dots, 5$ und $x \in [-1.2, 1.2]$. Welchen Verdacht haben Sie für den Wertebereich von $T_n|_{[-1,1]}$?

(c) Für $x \in [-1, 1]$ gilt die Darstellung (mit i sodass $i^2 = -1$):

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1 - x^2})^n + (x - i\sqrt{1 - x^2})^n\right]$$

Beweisen Sie daraus den in (b) vermuteten Wertebereich. Verwenden Sie dazu die Resultate aus Beispiel 14.

Beweis:

(a) Wir zeigen die Annahme $E(n)$ “$T_n(x)$ ist Polynom vom Grad n” mit Induktion.
Induktionsanfang $E(0)$ und $E(1)$: Ist wahr, da $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ Polynome vom Grad 0 bzw. 1 sind.
Induktionsschritt $E(n-1) \wedge E(n) \Rightarrow E(n+1)$:
Da T_n, T_{n-1} Polynome vom Grad n bzw. $n-1$ sind, existieren Darstellungen

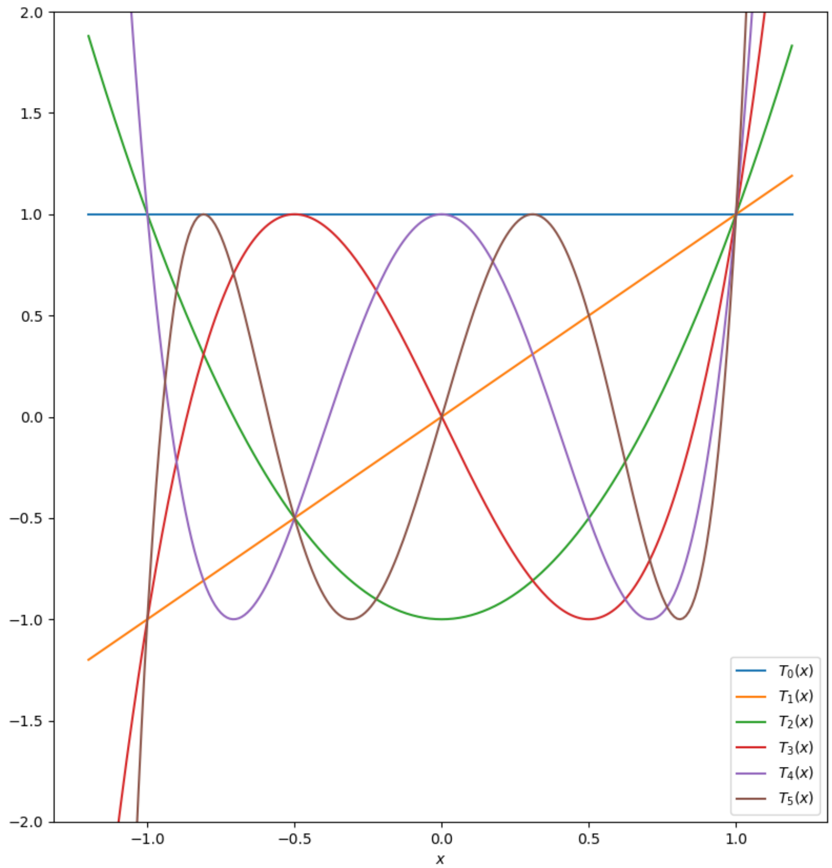
$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, \qquad\qquad T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k$$

mit $a_n \neq 0$ und $b_{n-1} \neq 0$. Aus der Definition von $T_{n+1}(x)$ folgt, dass

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2a_k x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k = b_1 x + \sum_{k=2}^{n-1}(2a_{k-1} + b_k)x^k + 2a_{n-1}x^n + 2a_n x^{n+1}. \end{aligned}$$

Da $a_n \neq 0$ ist T_{n+1} ein Polynom vom Grad $n+1$.

(b) Annahme: Wertebereich in $[-1, 1]$.



(c) Wir zeigen die Dastellung von T_n mit Induktion:

- Induktionsanfang
  - $n = 0$
  $$\frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^0 + (x - i\sqrt{1-x^2})^0\right] = 1 = T_0(x)$$
  - $n = 1$
  $$\frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2}) + (x - i\sqrt{1-x^2})\right] = x = T_1(x)$$
- Induktionsschritt

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\
&\overset{IV}{=} 2x\frac{1}{2}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^{n-1} + (x-i\sqrt{1-x^2})^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^{n-1}(2x(x+i\sqrt{1-x^2})-1)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(x-i\sqrt{1-x^2})^{n-1}(2x(x-i\sqrt{1-x^2})-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^{n+1} + (x-i\sqrt{1-x^2})^{n+1}\right],
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Gleichheit aus

$$
(x \pm i\sqrt{1-x^2})^2 = x^2 \pm 2xi\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) = 2x(x \pm 2xi\sqrt{1-x^2}) - 1
$$

folgt.

Sei $x \in [-1, 1]$ beliebig, dann gilt

$$
\begin{aligned}
|T_n(x)| &\leq \frac{1}{2}\left[\left|x+i\sqrt{1-x^2}\right|^n + \left|x-i\sqrt{1-x^2}\right|^n\right] \\
&\overset{14)}{=} \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x^2+1-x^2})^n + (\sqrt{x^2+1-x^2})^n\right] \leq \frac{1}{2}(1^n + 1^n) = 1.
\end{aligned}
$$

$\square$