Ein Beweis-Beispiel

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Zeige:
$A := \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

- Nach Def. A abg. gdw $O := X \setminus A$ offen. Es gilt:
  $O = \{x \in X : d(x, x_0) > \varepsilon\}$.
- Sei also $x' \in O$ beliebig. Zu zeigen: $(\exists \varepsilon' > 0)\, B_{\varepsilon'}(x') \subseteq O$.
  (Damit wäre gezeigt: O offen, und wir sind fertig.)
- Wissen: $x' \in O$, d.h. $d(x_0, x') > \varepsilon$. Dann gilt (!!):
  Es gibt ein $\varepsilon' > 0$ s.d. $d(x_0, x') > \varepsilon + \varepsilon'$.
  (Z.B. $\varepsilon' := \frac{d(x_0,x')-\varepsilon}{2}$.)
- Sei $y \in B_{\varepsilon'}(x')$. Wir wollen zeigen: $y \in O$. (Dann sind wir fertig.)
  Wir setzen also voraus: $d(y, x') < \varepsilon'$ und müssen zeigen: $d(y, x_0) > \varepsilon$.
- Dreiecksungleichung: $d(x_0, x') \leq d(x_0, y) + d(y, x')$.
  Auf beiden Seiten minus $d(y, x')$:
  $d(x_0, y) \geq d(x_0, x') - d(y, x') > \varepsilon + \varepsilon' - d(y, x') > \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon' = \varepsilon$ $\square$

Injektiv

Wir haben letzte Stunde definiert was $f''X$ (oder: $f[X]$) und was $f^{-1}Y$ heißt. Weitere Definitionen zu allgemeinen Funktionen:

- $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$.
- Beispiele für injektive Funktionen:
  x, x^3, $\frac{1}{x}$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),
  e^x, $\ln(x)$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R}^{>0}$).
- Beispiele für nicht injektive Funktionen:
  Konstante Funktionen, x^2, x^4, $\sin(x)$, $\frac{1}{x^2}$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).
- Noch einmal Mengen-Notation: Für Mengen A bezeichnet $|A|$ (üblicherweise) die Kardinalität (=Anzahl der Elemente) von A.
  (Für Zahlen x dagegen ist $|x|$ der Absolutbetrag.)
  Mit dieser Schreibweise: f injektiv gdw $(\forall b \in B)\, |f^{-1}(b)| \leq 1$.

Verknüpfung, Einschränkung

- Wenn $f : A \to B$ und $C \subseteq A$, dann ist $f \restriction C : C \to B$ die Einschränkung auf die kleinere Definitionsmenge (dh. $(f \restriction C)(x) = f(x)$ für alle $c \in C$.)
- Wenn $C \neq A$, dann ist $f \restriction C$ eine andere Funktion als f.
  Bsp: $f = x$ und $g = x^2$ und $h = e^x - 1$, alle mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
  Dann ist $f \restriction \{0\}$ und $g \restriction \{0\}$ und $h \restriction \{0\}$ dieselbe Funktion $i : \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $0 \mapsto 0$.
- Wenn $f : A \to B$ und $g : B \to C$, dann ist die "Verknüpfung" $g \circ f : A \to C$ definiert durch $x \mapsto g(f(x))$.
  Gesprochen: "f vor g", "g nach f", "g Kringel f".
  Bsp: $f = \ln(x)$, $g = x^2$.
  Dann $g \circ f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto (\ln(x))^2$,
  und $f \circ (g \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\}) : \ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \ln(x^2)$.

Surjektiv und bijektiv

- $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn $f''A = B$.
  (Äquivalent: wenn $(\forall b \in B)\, |f^{-1}(b)| \geq 1$, oder:
  $(\forall b \in B)\, (\exists a \in A)\, f(a) = b$.)
- Achtung: Surjektivität hängt von "Schreibweise" ab: Sei $f(x) = \frac{1}{x}$.
  Dann ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv; aber $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schon.
  Zur Erinnerung: Der Definitionsbereich ist Bestandteil einer Funktion:
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto e^x$ ist eine andere Funktion als $f \restriction [0, 1]$.
  Aber man kann dasselbe f entweder als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen oder als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$.
- Insbesondere: $f : A \to f''A$ ist immer surjektiv.
- Bijektiv heißt: Injektiv und surjektiv.
- Für $f : A \to B$ gilt also: f injektiv gdw. $f : A \to f''B$ bijektiv.

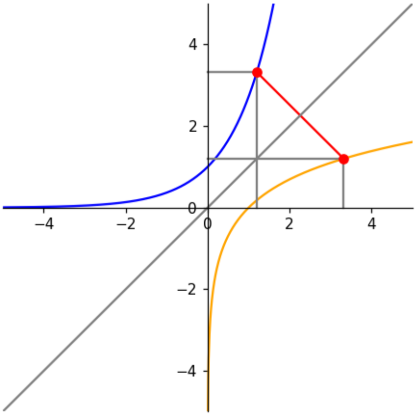
In $\mathbb{R}$: Monoton

- $f : A \to \mathbb{R}$ für $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend, wenn $x < y \to f(x) < f(y)$ für alle x, y in A; und streng monoton fallend, wenn $x < y \to f(x) > f(y)$.
- Streng monoton wachsend (oder fallend) impliziert injektiv.
  (Bew.: Wenn $x \neq y$, dann entweder $x < y$ oder $y < x$; daher entweder $f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x)$, in jedem Fall $f(x) \neq f(y)$.)
- Streng monoton wachsend impliziert: $x < y$ gdw $f(x) < f(y)$.
  (Analog für fallend.)
  (Im wesentlichen selber Beweis.)

Umkehrfunktion

- Wenn $f : A \to B$ injektiv, dann definiere die "Umkehrfunktion", auch: "Inverse", $f^{-1} : f''B \to A$ durch $f^{-1}(b) = a$ gdw. $f(a) = b$.
  So ein $f^{-1} : f''B \to A$ ist immer bijektiv.
- Inkonsistent mit zuvor definiertem f^{-1}: Falls f injektiv und $b \in f''A$, dann $f^{-1}(b) = \{f^{-1}(b)\}$.
  Wie immer: Kontext gibt an was gemeint ist.
- Bsp: $f = x^2$ nicht injektiv auf $\mathbb{R}$, und für $x > 0$ ist $f^{-1}(x) = \{+\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$.
  Aber $g = f \restriction \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist injektiv, mit Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Bsp: Sei $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentalfunktion $x \mapsto e^x$.
  Beachte dass exp injektiv ist und $\exp'' \mathbb{R} = \mathbb{R}^{>0}$.
  Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus: $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$.
- Wenn $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, dann auch f^{-1}. (Und dasselbe für fallend.)

Umkehrfunktion als Graph



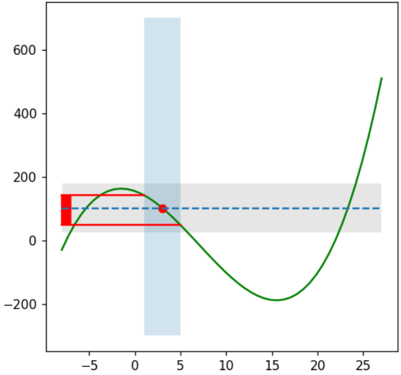
- e^x
- $e^{1.2} = 3.32\ldots$
- Daher: $\ln(3.32\ldots) = 1.2$
- Entspricht Spiegelung an Diagonale
- $\ln(x)$

Stetigkeit

Stetigkeit

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

- f heißt stetig bei x_0 (für ein $x_0 \in A$), wenn $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- Äquivalent: wenn $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,x \in B_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.
- f heißt stetig, wenn f stetig bei x_0 für alle $x_0 \in A$.



- Eine Funktion f, (hier $\frac{1}{7}x^3 - 3x^2 - 10x + 155$)
- Wählen ein Argument x_0 (hier: 3)
- mit Funktionswert $f(x_0)$ (hier: $101.857\ldots$)
- kleine ε-Umgebung von $f(x_0)$
- Pointe: Es gibt kleine δ-Umgebung von x_0, s.d.
- $f''B_\delta(x_0) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$

Stetigkeit

Unsere offizielle Definition (funktioniert für alle metrische Räumen, zB $\mathbb{R}^n$):
Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrisch, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$.

Definition

f ist stetig bei a (für ein $a \in A$), wenn
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, x \in B^X_\delta(a) \cap A \to f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(a))$.

(Dabei ist $B^X_\delta(a) = \{x \in X :\ d^X(x, a) < \varepsilon\}$ etc.)

Äquivalente Formulierungen:

- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, f'' B^X_\delta(a) \subseteq B^Y_\varepsilon(f(a))$, bzw
- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, f^{-1} B^Y_\varepsilon(f(a)) \supseteq B^X_\delta(a)$

Definition

$f : A \to Y$ heißt stetig, wenn f stetig ist bei a für alle $a \in A$.

Topologische Definition

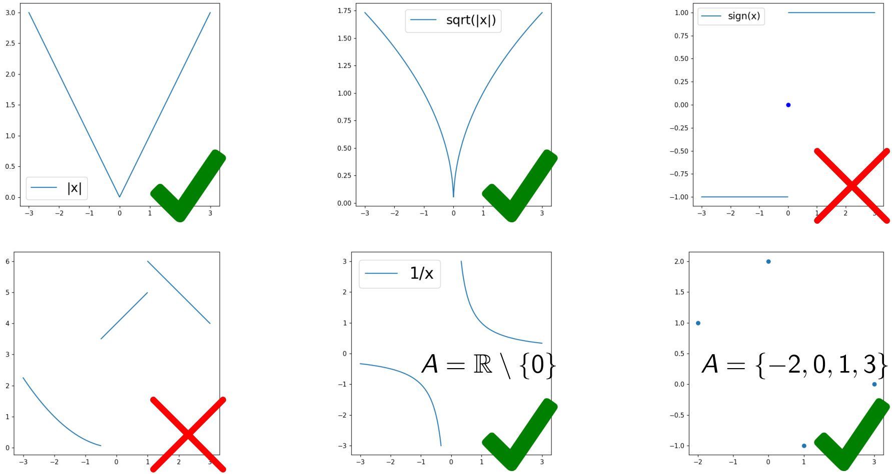
Bemerkung: Es gilt: $f : X \to Y$ ist stetig gdw. das Urbild von offen offen ist, d.h.:

$$(\forall O \subseteq Y) \quad O \text{ offen } \to \ f^{-1}O \text{ offen.}$$

Das ist “wahre” Definition die in allen topologischen Räumen funktioniert.

Beispiele

Intuition $\sim$ Graph kann "ohne Unterbrechung durchgezogen werden".
Beispiele: $f : A \to \mathbb{R}$ (mit "natürlichem" A.) Ist f stetig?



Polynome

- Die Konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto a$ ist stetig.
  (Nicht injektiv. Nicht surjektiv.)
- Affine (schlampig: “lineare”) Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = ax + b$.
  Solche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, und bijektiv wenn $a \neq 0$.
  (“Linear” sind eigentlich nur Funktionen $x \mapsto ax$, d.h. mit $b = 0$.)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$ ist stetig.
  Für n ungerade ist f bijektiv.
  Für n gerade ist $x^n = (-x)^n$, und $f''\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
- Polynome (mit Grad n) sind Funktionen der Form
  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei alle $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.
- Polynome sind stetig.
- “Aus der Ferne” ist nur der höchste Koeffizient relevant: $f(x) \sim a_n x^n$.

Potenzen

- Kennen schon x^n für $n \in \mathbb{N}$. $x^0 := 1$. (Auch $0^0 = 1$.)
- $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, d.h. "das" y mit $y^n = x$.
  - Fall n gerade: Das geht nur für $x \geq 0$, es gibt zwei solche y, wir nehmen das nicht-negative.
    $x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und injektiv); $(x^{\frac{1}{n}})''\mathbb{R}^{\geq 0} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
  - n ungerade: Es gibt immer ein eindeutiges y.
    $x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und bijektiv.
- $x^{-r} := \frac{1}{x^r}$.
- $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$; $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$ (Achtung: $\neq x^{(r^s)}$)
- Damit kann man x^r definieren für alle $r \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$.
  Bsp: $2^\pi \sim 2^{3.14} = \sqrt[100]{2^{314}}$; implizite Behauptung: Wenn man immer mehr Nachkommastellen verwendet, konvergiert die entsprechende Folge. 2^π ist dann definiert als der Grenzwert.

Exponentialfunktion

- Insbesonder ist e^x definiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- e, die Eulersche Zahl ist ~ 2.7; exakt:
  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
  Dabei ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, gesprochen "n Faktorielle".
  Wir werden später sehen warum e nützlich ist; auch $n!$ werden wir noch brauchen.
- $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und injektiv), $(e^x)''\mathbb{R} = \mathbb{R}^{>0}$.
  Dasselbe gilt für a^x ($a > 0$), weil $a^x = e^{x \ln a}$.

Logarithmus

- $\ln(x) = y$ ist definiert durch $x = e^y$. Das geht nur für $x > 0$.
  $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und bijektiv).
- Insbes: $e^{\ln(a)} = a$, und $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln(a)}$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln(x^r) = r \ln x$.
- Insbes: $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$;
- Analg ist $\ln_a$ definiert ($a > 0$): $\ln_a(x) = y$ gdw. $x = a^y$.
  Weil $a^y = e^{y \ln(a)}$, ist $\ln(x) = y \ln(a)$, d.h. $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
  Bsp: $\ln_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 2} = 1.44\ldots \cdot \ln(x)$.

Winkelfunktionen

- Wir haben noch keine komplexen Zahlen verwendet; es reicht zu wissen dass $i^2 = -1$. Dann: $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ac+bd)$
- Es gilt: $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
- Aus $e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi}e^{i\psi}$ bekommen wir dann die Additionstheoreme:
  $\sin(\phi+\psi) = \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi)$,
  $\cos(\phi+\psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)$.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Nicht injektiv, sondern periodisch mit Periode 2π.

Stetigkeit und Folgen

Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrisch, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ und $a \in A$.

Theorem

f ist stetig bei a ist äquivalent zu Folgendem:
Sie x_n eine Folge in A. Dann $\lim(x_n) = a \ \to \ \lim(f(x_n)) = f(a)$.

(D.h.: Wenn x_n konvergiert mit Limes a, dann konvergiert auch $f(x_n)$ mit Limes $f(a)$.)

Beweis: Angenommen f stetig, $\lim(x_n) = a$, $\varepsilon > 0$. Brauchen M s.d.
$(\forall n > M)\, d^Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Weil f stetig gibt es δ s.d.
$d^X(x_n, a) < \delta \to d^Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Weil $\lim(x_n) = a$ gibt es M s.d.
$(\forall n > M)\, d^X(x_n, a) < \delta$.
Angenommen f nicht stetig, d.h.,
$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x_\delta \in A)\,(d^X(x_\delta, a) < \delta \wedge d^Y(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon)$.
Die Folge $x_{\frac{1}{n}}$ ist das gesuchte Gegenbeispiel. □

Verknüpfung stetiger reellen Funktionen

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und $g : B \to \mathbb{R}$ stetig.

Theorem

- $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ *ist stetig; genauso* $f - g$ *und* $f \cdot g$.
- $\frac{f}{g} : \{x \in A \cap B : \ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ *ist steig.*
- *Wenn* $f''A \subseteq B$, *dann ist* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Bemerkung: Das sind alles Instanzen des allgemeineren Satzes (der in allen metrischen Räumen gilt): Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig; zusammen mit der Tatsache dass die Addition $+ : \mathbb{R}^2\mathbb{R}$ stetig ist, genauso die Multiplikation und die Division (auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Eigenschaften stetiger reellen Funktionen

Sei $a \leq b$ in $\mathbb{R}$.

Theorem (ohne Beweis)

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist $f''[a, b] = [c, d]$ für ein $c \leq d$.

Daraus folgt unter anderem:

- Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird mindestens einmal angenommen (weil ja $c \leq f(a), f(b) \leq d$).
- Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann hat f eine Nullstelle.
- $f''[a, b]$ hat ein Maximum (d) und ein Minimum (c); insbesondere kann es nicht unbeschränkt sein.