Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Stefan Wurm, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 12. Mai 2016 21. April 2016

3. Übungsblatt

Kreuzen Sie **bis zwei Stunden vor Übungsbeginn** auf TUWEL (`https://tuwel.tuwien.ac.at`) jene Aufgaben, die Sie gerechnet haben und in der Übung präsentieren können.

Mit * gekennzeichnete Beispiele **dürfen** Sie mit MATLAB bearbeiten, jene mit ! **müssen** mit MATLAB gelöst werden. Bringen Sie Ihren Code auf USB-Stick oder eigenem Rechner (mit VGA-Anschluss) mit.

Bei Unklarheiten wenden Sie sich bitte gerne an `stefan.wurm@tuwien.ac.at` oder posten Sie in das TUWEL-Forum.

Aufgabe 1:
(!) Berechnen Sie die Nullstelle x^* für die Funktion $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedende Startwerte.

Aufgabe 2:
(!) Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Implementieren Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$

zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3:
(!) Informieren Sie sich über das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren und implementieren Sie beide in MATLAB. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ für die Nullstelle $x_0 = 1$ mit verschiedenen Startwerten. Berechnen Sie in jedem Schritt den absoluten Fehler und plotten Sie anschließend den Fehlerverlauf in einem Semilogarithmischen Plot.

Aufgabe 4:
(!) Laut einer Studie wurde folgender Zusammenhang zwischen dem Druck und Volumen einer Erdgaslagerstätte festgestellt:

$$V = p^{-1.5}\left[\frac{p - 1/(1+k)}{1 - 1/(1+k)}\right]^b$$

mit $b = 1.5k/(1+k), p =$Druck, $V =$ Volumen, $k = 1.06315$. Sinkt der Druck unter einen gewissen Wert, wird der Abbau des Erdgases nicht mehr ökonomisch. Bestimmen Sie diesen Wert des Druckes bei dem das Volumen nur mehr $V = 0.15$ beträgt.

Hinweis: Sekantenverfahren für das Startintervall $[1, 2]$,

Aufgabe 5:
Zeigen Sie folgendes Konvergenzresultat des Newton-Verfahrens:

$$x^* - x_{n+1} = -(x^* - x_n)^2 \frac{F''(\xi_n)}{2F'(x_n)}, \qquad \xi_n \text{ zwischen } x_n \text{ und } x^* \tag{1}$$

wobei x^* eine Nullstelle von $F(x)$ ist, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, und F zweimal stetig differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von F um Entwicklungspunkt x_n.

Aufgabe 6:
(!) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + (3 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^2 - 1$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.

(b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x - x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die MATLAB Befehle POLYVAL, POLYDER, DECONV. Eine exakte Nullstelle lautet 1, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratischer Lösungsformel berechnen.

Aufgabe 7:
(!) Betrachten Sie wieder das Polynom aus der vorigen Aufgabe. Eine alternative Methode zur Berechnung der Nullstellen ist folgende: Für ein Polynom mit Nullstellen x_1, x_2, x_3 der Form $p(x) = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$ gelten nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Vieta die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ c_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems.