Fragenkatalog 2. Abgabegespräch Formale Modellierung

3 Reguläre Sprachen

1. **Was ist eine formale Sprache?**

   Menge von Zeichenketten, die aus den Symbolen eines beliebigen Alphabets aufgebaut sind.

   Zeichenkette: endliche Folge von Symbolen

   Alphabet: endliche, nicht-leere Menge von Symbolen

2. **Erkläre/Berechne die Vereinigung, Verkettung und den Stern von Sprachen.**

   Die Vereinigung von zwei Sprachen bildet eine neue Sprache, die alle Zeichenketten beider Sprachen beinhaltet.

   Die Verkettung von zwei Sprachen bildet eine neue Sprache, indem alle Zeichenketten der ersten Sprache mit allen Zeichenketten der zweiten Sprache verknüpft werden (d.h. ohne Leerzeichen aneinandergehängt).

   Der Stern von Sprachen, bildet eine neue Sprache, indem alle Zeichenketten der Sprache miteinander verknüpft werden.

3. **Definiere den Begriff der regulären Sprachen.**

   Alle Sprachen, die aus einem Alphabet mit Hilfe von Vereinigung, Verkettung und Stern gebildet werden können.

4. **Zeige, dass eine verbal definierte Sprache regulär ist, d.h., führe sie gemäß der Definition regulärer Sprachen auf die grundlegenden Operationen zurück.**

5. **Beschreibe eine umgangssprachlich gegebene Sprache durch einen regulären Ausdruck in algebraischer bzw. EBNF-Notation, als Syntaxdiagramm oder durch einen POSIX Extended Regular Expression.**

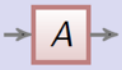
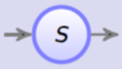
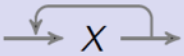
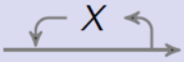
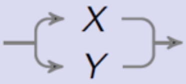
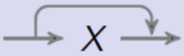
   Algebraische Notation:

   Alternativen:

   Verkettung:

   Wiederholung:

   Syntaxdiagramm:

	A	Abkürzung
	$\{s\}$	Symbol
	X^+	Wiederholung ≥ 1
	X^*	Wiederholung ≥ 0
	$X \cdot Y$	Aufeinanderfolge
	$X \cup Y$	Alternativen
	$\{\varepsilon\} \cup X$	Option

EBNF-Notation:

AB	$A \cdot B$	Aufeinanderfolge
$A\,\vert\,B$	$A \cup B$	Alternativen
$[A]$	$\{\varepsilon\} \cup A$	Option
$\{A\}$	A^*	Wiederholung
(A)	(A)	Gruppierung
"s"	$\{s\}$	Symbol

POSIX Extended Regular Expressions:

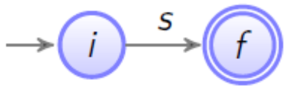
Posix Extended Regular Expressions (Ere)

regexp	trifft zu auf	*regexp*	trifft zu auf
$\backslash s$	Zeichen s	rr'	r gefolgt von r'
s	s, falls kein Sonderzeichen	$r\,\vert\,r'$	r oder r'
.	alle Zeichen	$r*$	≥ 0 Mal r
^	Zeilenanfang	$r+$	≥ 1 Mal r
$	Zeilenende	$r?$	≤ 1 Mal r
$[s_1 \cdots s_n]$	ein Zeichen aus $\{s_1, \ldots, s_n\}$	$r\{i\}$	i Mal r
$[\hat{\ } s_1 \cdots s_n]$	alle Zeichen außer $s_1, \ldots, s_n$	$r\{i,\}$	$\geq i$ Mal r
(r)	r	$r\{i,j\}$	i bis j Mal r

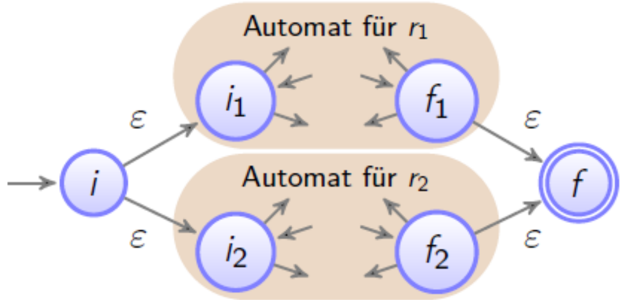
6. **Konstruiere zu einem gegebenen regulären Ausdruck einen endlich Automaten, der dieselbe Sprache akzeptierte. Erkläre die allgemeine Vorgangsweise.**

Automat für $\emptyset$:

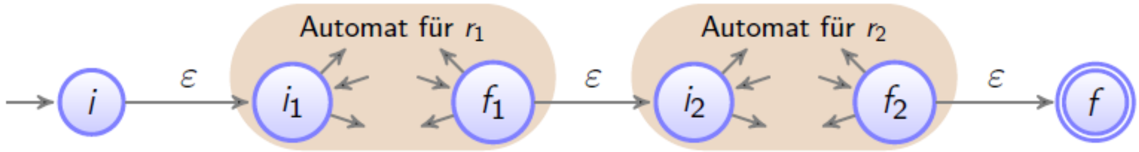
Automat für $s \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$:



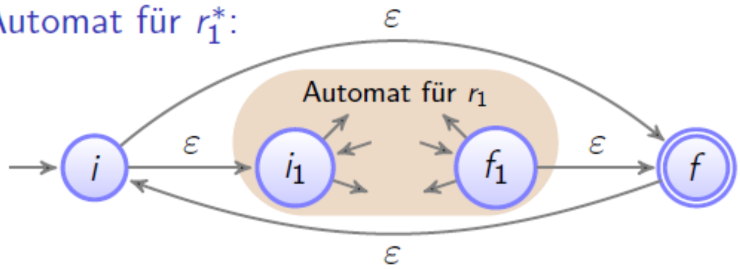
Automat für $r_1 + r_2$:



Automat für $r_1 r_2$:

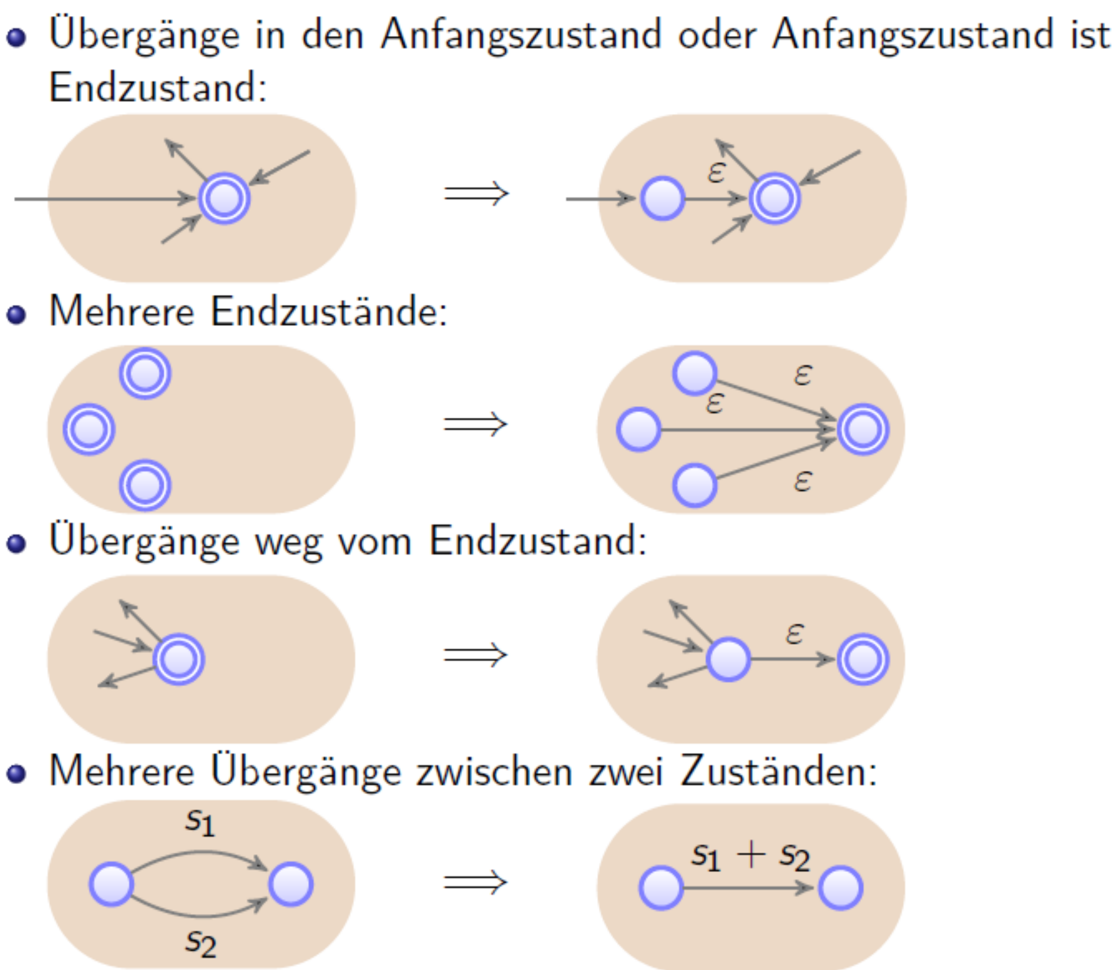


Automat für r_1^*:



7. **Konstruiere zu einem gegebenen endlichen Automaten einen regulären Ausdruck, der dieselbe Sprache beschreibt. Erkläre die allgemeine Vorgehensweise.**

Erstellen eines verallgemeinerten Automaten:



4 Kontextfreie Grammatiken

1. **Definiere den Begriff kontextfreie Grammatik. Wann liegt ein Wort in der durch sie definierten Sprache?**

Kontextfreie Grammatiken sind Mengen von Ersetzungsregeln mit zwei Arten von Symbolen (Terminale, Nonterminale). Ausgehend vom Start-Nonterminal werden Nonterminale solange ersetzt, bis nur noch Terminale übrig sind.

Kontextfreie Grammatiken werden beschrieben durch ein 4-Tupel , wobei

… Menge der Nonterminalsymbole (Variablen)

… Menge der Terminalsymbole

… Produktionen

… Startsymbol

2. **Zeigen Sie mittels einer Links-, Rechts- bzw. Parallelableitung, dass ein bestimmtes Wort in der durch eine gegebene Grammatik definierten Sprache liegt.**

Linksableitbarkeit: $x\,A\,y \Rightarrow_L x\,w\,y$ falls $A \to w \in P$ und $x \in T^*$
(In jedem Schritt wird die linkeste Variable ersetzt.)

Rechtsableitbarkeit: $x\,A\,y \Rightarrow_R x\,w\,y$ falls $A \to w \in P$ und $y \in T^*$
(In jedem Schritt wird die rechteste Variable ersetzt.)

Parallelableitbarkeit: $x_0\,A_1\,x_1 \cdots A_n\,x_n \Rightarrow_P x_0\,w_1\,x_1 \cdots w_n\,x_n$
falls $A_1 \to w_1, \ldots, A_n \to w_n \in P$ und $x_0, \ldots, x_n \in T^*$
(In jedem Schritt werden alle Variablen ersetzt.)

3. **Erkläre den Zusammenhang zwischen induktiven Definitionen und kontextfreien Grammatiken sowie zwischen Grammatiken mit und ohne EBNF-Notation. Übersetze die Spezifikation einer Sprache aus einem dieser Formalismen in einen der anderen.**

Induktive Definition für $\mathcal{M}$	kontextfreie Grammatik für $\mathcal{M}$
Mengen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$, A_1, B_1, ...	Var. $\langle\mathcal{M}\rangle$, $\langle\mathcal{M}_0\rangle$, $\langle A_1\rangle$, $\langle B_1\rangle$, ...
$\mathcal{M}$ ist die kleinste Menge, sodass:	$\mathcal{M} = \mathcal{L}(\langle \ldots, P, \langle\mathcal{M}\rangle\rangle)$, wobei P folgende Produktionen sind:
$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$	$\langle\mathcal{M}\rangle \to \langle\mathcal{M}_0\rangle$
$f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{M}$, falls $x_1 \in A_1, \ldots, x_m \in A_m$	$\langle\mathcal{M}\rangle \to f(\langle A_1\rangle, \ldots, \langle A_m\rangle)$
$g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$, falls $x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n$	$\langle\mathcal{M}\rangle \to g(\langle B_1\rangle, \ldots, \langle B_n\rangle)$
$\cdots \in \mathcal{M}$, falls ...	$\langle\mathcal{M}\rangle \to \ldots$
$h(x_1, x_2) \in \mathcal{M}$, falls $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$	$\langle\mathcal{M}\rangle \to h(\langle\mathcal{M}\rangle, \langle\mathcal{M}\rangle)$
$h(x, x) \in \mathcal{M}$, falls $x \in \mathcal{M}$	keine Entsprechung, nicht kontextfrei

BNF-Notation:

Nonterminale werden in spitzen Klammern angegeben, Terminale unter Anführungszeichen. wird als Trennsymbol verwendet. Dadurch müssen die Mengen der Nonterminale (V) und der Terminale (T) nicht mehr extra angegeben werden.

Bsp.:

EBNF-Notation:

Auf der rechten Seite der Produktionen sind reguläre Ausdrücke erlaubt. Dies führt zu besserer Lesbarkeit durch Vermeidung von Rekursionen und Leerwörtern und dadurch Kompaktere Spezifikationen.

Bsp.:

4. **Erkläre den Begriff der Mehrdeutigkeit von Grammatiken bzw. Sprachen**

   Eine kontextfreie Grammatik heißt Mehrdeutig, wenn es ein Wort mit mehreren Linksableitungen gibt.

   Eine kontextfreie Sprache heißt (inhärent) Mehrdeutig, wenn alle kontextfreien Grammatiken für sie mehrdeutig sind.

5. **Beschreibe eine verbal spezifizierte Sprache durch eine kontextfreie Grammatik mit/ohne EBNF-Notation bzw. durch ein Syntaxdiagramm.**

5 Prädikatenlogik

1. **Definiere die Syntax und Semantik von Termen.**

   Syntax:

   Die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, kurz $\mathcal{T}$, der Terme über $\mathcal{F}$ und $\mathcal{V}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

   (t1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ Individuenvariablen sind Terme.

   (t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$. Konstantensymbole sind Terme.

   (t3) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.
   Funktionssymbole mit der passenden Zahl an Termargumenten sind Terme.

   Semantik:

Der Wert eines Terms in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathrm{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(v) = \sigma(v)$ für $v \in \mathcal{V}$;

(v2) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(f) = I(f)$ für $f/0 \in \mathcal{F}$;

(v3) $\mathrm{val}_{I,\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n)) = I(f)(\mathrm{val}_{I,\sigma}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $f/n \in \mathcal{F}$, $n > 0$.

2. Werte einen Term der Semantikdefinition entsprechend aus.

3. Definiere die Syntax und Semantik prädikatenlogischer Formeln.

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Die Menge $\mathcal{PF}$ der prädikatenlogischen Formeln über der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(p1) $P \in \mathcal{PF}$, wenn $P/0 \in \mathcal{P}$;

(p2) $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{PF}$, wenn $P/n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$;

(p3) $\top, \bot \in \mathcal{PF}$;

(p4) $\neg F \in \mathcal{PF}$, wenn $F \in \mathcal{PF}$;

(p5) $(F * G) \in \mathcal{PF}$, wenn $F, G \in \mathcal{PF}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

(p6) $\forall x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

(p7) $\exists x\, F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Der Wert einer Formel in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\mathsf{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(P) = I(P)$ für $P/0 \in \mathcal{P}$;

(v2) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(P(t_1, \dots, t_n)) = I(P)(\mathsf{val}_{I,\sigma}(t_1), \dots, \mathsf{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $P/n \in \mathcal{P}$;

(v3) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\top) = 1$ und $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\bot) = 0$;

(v4) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\neg F) = \text{not}\,\mathsf{val}_{I,\sigma}(F)$;

(v5) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\,(F * G)\,) = \mathsf{val}_{I,\sigma}(F) \circledast \mathsf{val}_{I,\sigma}(G)$,
wobei $\circledast$ die logische Funktion zum Operator $*$ ist;

(v6) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\,\forall x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathsf{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(v7) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\,\exists x\, F\,) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathsf{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für mind. ein } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

4. **Bestimme den Wert einer Formel in einer gegebenen Interpretation.**

5. **Erkläre die Begriffe Erfüllbarkeit, Widerlegbarkeit, Unerfüllbarkeit und Gültigkeit für prädikatenlogische Formeln.**

   … Interpretation, … Variablenbelegung

   - Erfüllbar, wenn für mindestens ein und ein (und nennt man Modell von F)
   - Widerlegbar, wenn für mindestens ein und ein (und nennt man Gegenbeispiel oder Gegenmodell zu F)
   - Unerfüllbar, wenn für alle und
   - Gültig, wenn für alle und alle (Tautologie)

6. **Gegeben eine Formel, finde eine erfüllende bzw. eine widerlegende Interpretation.**

7. **Erkläre, warum eine gegebene Formel erfüllbar, widerlegbar, unerfüllbar oder gültig ist.**

8. **Definiere den Begriff der logischen Konsequenz.**

   Falls alle Prämissen in und wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr in und . Ist die Prämisse nicht wahr, kann die Konklusion wahr oder falsch sein.

$F_1, \ldots, F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \supset G$ gültig.

9. **Folgt eine gegebene Formel aus anderen gegebenen?**

10. **Formalisiere eine gegebene Formel aus anderen gegebenen?**

11. **Übersetze eine Formel in Umgangssprache.**

6 Petri-Netze

1. **Definiere den Begriff der Petri-Netze**

Petrinetz

... wird beschrieben durch ein 5-Tupel $N = \langle S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0 \rangle$, wobei

- S ... endliche Menge von Stellen
- T ... endliche Menge von Transitionen
- ${}^\bullet()\colon T \mapsto M$ ... Vorbedingungen
- $()^\bullet\colon T \mapsto M$ ... Nachbedingungen
- $m_0 \in M$ ... Anfangsmarkierung

2. **Gegeben ein Petri-Netz, bestimme alle aktivierten Transitionen. Bestimme die erreichbaren Markierungen.**