(1) [6 Punkte] Man bestimme mit Hilfe einer in der Vorlesung kennengelernten kombinatorischen Methode (kein "Herumprobieren") die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben a, b, c, d, e, in denen weder der Block "abc", noch der Block "bcd", noch der Block "cde" vorkommt.

Lösung: Sei M die Menge aller Permutationen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$, dann ist $|M| = 5! = 120$. Sei weiters A die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block abc enthalten, B die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block bcd enthalten, und C die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block cde enthalten.

Dann gilt für die gesuchte Anzahl n offenbar:

$$n = |M \setminus (A \cup B \cup C)| = |M| - |A \cup B \cup C|.$$

Zur Bestimmung von $|A \cup B \cup C|$ verwenden wir das Inklusions-Exklusions-Prinzip:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Mächtigkeiten beachten wir:
Die Elemente von A entsprechen den Permutationen der 3-elementigen Menge $\{abc, d, e\}$, und analog entsprechen die Elemente von B bzw. C den Permutationen von $\{a, bcd, e\}$ bzw. $\{a, b, cde\}$.
Weiters entsprechen die Elemente von $A \cap B$ bzw. $B \cap C$ den Permutationen von $\{abcd, e\}$ bzw. $\{a, bcde\}$, und schließlich ist $A \cap C = A \cap B \cap C$ die 1-elementige Menge $\{abcde\}$.
Somit ist $|A| = |B| = |C| = 3! = 6$, $|A \cap B| = |B \cap C| = 2! = 2$ und $|A \cap C| = |A \cap B \cap C| = 1$.
Damit liefert das Inklusions-Exklusions-Prinzip:

$$|A \cup B \cup C| = 6 + 6 + 6 - 2 - 1 - 2 + 1 = 19 - 5 = 14,$$

und die gesuchte Anzahl ist

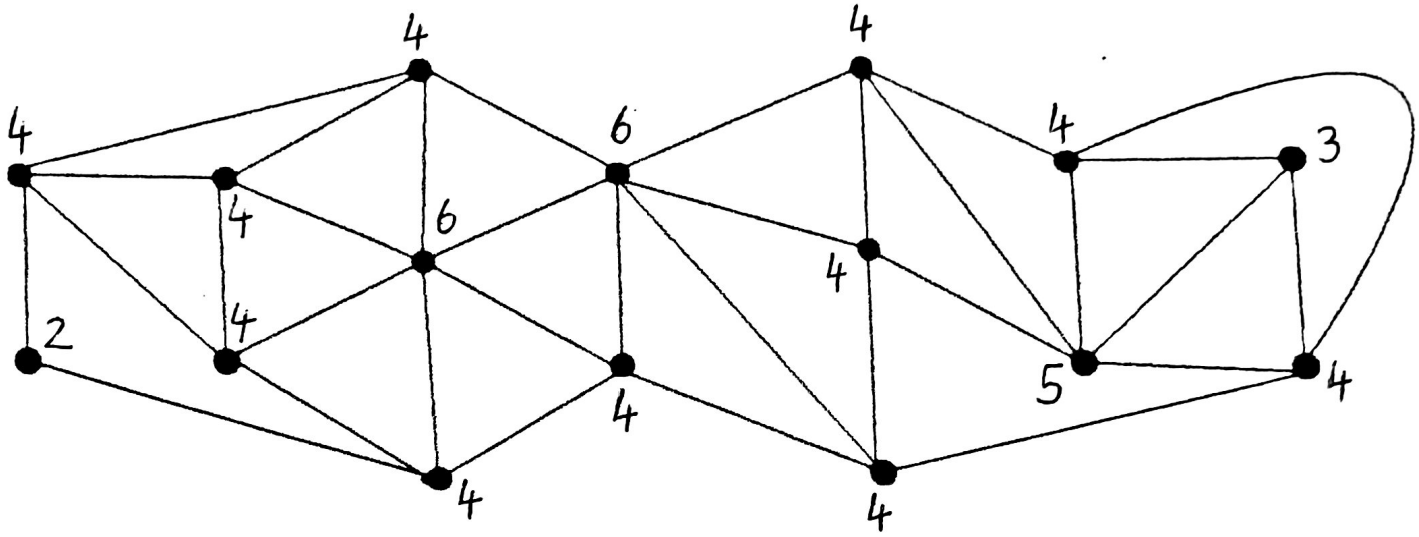
$$n = |M| - |A \cup B \cup C| = 120 - 14 = 106$$

Zur Probe bestimmen wir $|A \cup B \cup C|$ durch Auflisten der Elemente von A, B, C und Streichen der doppelt vorkommenden Elemente.

Menge A	Menge B	Menge C
abcde	~~abcde~~	~~abcde~~
abced	aebcd	acdeb
dabce	bcdae	bacde
deabc	bcdea	~~bcdea~~
eabcd	~~eabcd~~	cdeab
edabc	ebcda	cdeba

Also werden 4 der 18 Elemente gestrichen, und es ergibt sich wieder $|A \cup B \cup C| = 14$.

(2) Man bestimme im nachstehenden Graph sämtliche Knotengrade und untersuche, ob der Graph eine offene oder geschlossene Euler'sche Linie besitzt. [7 Punkte]



<u>Lösung:</u> Die Knotengrade sind gerade (2, 4, 6) bis auf zwei Ausnahmen, wo die Knotengrade ungerade sind (3, 5). Weiters ist der Graph offensichtlich zusammenhängend. Also gibt es nach Satz 2.28 (Buch Seite 70) eine offene Euler'sche Linie, deren Anfangs- bzw. Endknoten die beiden Knoten mit ungeradem Grad sind.

(3) [7 Punkte]

(a) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Differenzengleichung:

$$a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0.$$

(b) Man bestimme eine Partikulärlösung der folgenden inhomogenen Differenzengleichung:

$$a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 32 - 4 \cdot 3^{n+2}.$$

Lösung: (a) Die charakteristische Gleichung der gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung lautet: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$.

Ihre Wurzeln (Nullstellen) sind $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Daraus ergibt sich als Lösung der Differenzengleichung:

$$a_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n = (C_1 + C_2 n)\cdot(-3)^n, \; n \in \mathbb{N},$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Die Störfunktion der gegebenen inhomogenen Differenzengleichung hat die Form $s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$ mit $s_n^{(1)} = 32$ und $s_n^{(2)} = -4 \cdot 3^{n+2}$. Nach dem Superpositions-prinzip suchen wir für $s_n^{(i)}$ eine partikuläre Lösung $a_n^{(i)}$ und haben dann mit $a_n^{(p)} = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$ eine partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzengleichung.

Für $s_n^{(1)} = 32$ machen wir den Ansatz $a_n^{(1)} = A$ (= konstant).

$\Longrightarrow a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = A + 6A + 9A = 16A = 32 \Longrightarrow A = 2$

$\Longrightarrow a_n^{(1)} = 2, \; \forall n \in \mathbb{N}$

Für $s_n^{(2)} = -4 \cdot 3^{n+2}$ machen wir den Ansatz $a_n^{(2)} = B \cdot 3^n$.

$\Longrightarrow a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = B \cdot 3^{n+2} + 6B \cdot 3^{n+1} + 9B \cdot 3^n = -4 \cdot 3^{n+2}$

$\Longrightarrow$ (Division durch 3^{n+2}) $\Longrightarrow B + 2B + B = -4 \Longrightarrow B = -1$

$\Longrightarrow a_n^{(2)} = -3^n, \; \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n^{(p)} = 2 - 3^n, \; \forall n \in \mathbb{N}$

Anmerkung: Nach (a) und (b) ergibt sich als Gesamtlösung der inhomogenen Gleichung: $a_n = (C_1 + C_2 n)\cdot(-3)^n + 2 - 3^n, \; n \in \mathbb{N}$.