

58. Der Gebrauchtwert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ 2. Grades als Funktion der Nutzungsdauer t an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t=0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden p -Werten.

nach $t = 2$ Jahren: 50% des Anschaffungspreises $\Rightarrow p(2) = 50$

nach $t = 4$ Jahren: 25% des Anschaffungspreises $\Rightarrow p(4) = 25$

nach $t = 0$ Jahren: 100% des Anschaffungspreises $\Rightarrow p(0) = 100$

um das Beispiel zu lösen, nehme ich die Lagrange-Interpolation:

Gesucht: Polynom 2. Grades: $p(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2$

wir haben folgende Werte gegeben: $(0,100)$, $(2,50)$, $(4,25)$

nun die Lagrange-Polynome ausrechnen:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(0-2) \cdot (0-4)} = \frac{x^2 - 2x - 4x + 8}{(-2) \cdot (-4)} = \frac{x^2 - 6x + 8}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{6x}{8} + \frac{8}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4} + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-4)}{(2-0) \cdot (2-4)} = \frac{x^2 - 4x}{2 \cdot (-2)} = \frac{x^2 - 4x}{(-4)} = -\frac{x^2}{4} + \frac{4x}{4} = -\frac{x^2}{4} + x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(4-0) \cdot (4-2)} = \frac{x^2 - 2x}{4 \cdot 2} = \frac{x^2 - 2x}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{2x}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}$$

nun einsetzen in den Ansatz von oben:

$$p(x) = \left(\frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4} + 1 \right) \cdot 100 + \left(-\frac{x^2}{4} + x \right) \cdot 50 + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} \right) \cdot 25$$

$$p(x) = \frac{100x^2}{8} - \frac{300x}{4} + 100 - \frac{50x^2}{4} + 50x + \frac{25x^2}{8} - \frac{25x}{4} \Rightarrow \text{nach Exponent reihen}$$

$$p(x) = \frac{100x^2}{8} - \frac{50x^2}{4} + \frac{25x^2}{8} - \frac{300x}{4} + 50x - \frac{25x}{4} + 100 \Rightarrow \text{gleichen Nenner bringen}$$

$$p(x) = \frac{50x^2}{4} - \frac{50x^2}{4} + \frac{25x^2}{8} - \frac{300x}{4} + \frac{200x}{4} - \frac{25x}{4} + 100$$

$$p(x) = \frac{25x^2}{8} - \frac{125x}{4} + 100$$

die Werte, die zu kontrollieren sind:

nach $t = 1$ Jahren: 70% des Anschaffungspreises $\Rightarrow p(1) = 70$

nach $t = 3$ Jahren: 35% des Anschaffungspreises $\Rightarrow p(3) = 35$

$$p(1) = \frac{25 \cdot 1^2}{8} - \frac{125 \cdot 1}{4} + 100 = \dots[\text{Taschenrechner}] \dots = 71,875$$

$$p(3) = \frac{25 \cdot 3^2}{8} - \frac{125 \cdot 3}{4} + 100 = \dots[\text{Taschenrechner}] \dots = 34,375$$

wie man erkennt, ist die Funktion sehr gut geeignet

Hier noch die Funktion sowie die gegebenen Punkte gezeichnet:

