Zum zweiten Übungstest kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.
(Druckfehler und Irrtümer vorbehalten.)

1 Definition Metrik

Welche der folgenden Eigenschaften wird von jeder Metrik $d : X^2 \to \mathbb{R}$ erfüllt?

- $(\forall x, y \in X)\, d(x, y) \geq 0$
- $(\forall x, y \in X)\, (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x, y \in X)\, (d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x > y)$
- $(\forall x, y \in X)\, d(x, y) = d(y, x)$
- $(\forall x, y \in X)\, d(x, y) = -d(y, x)$
- $(\forall x, y, z \in X)\, d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$
- $(\forall x, y, z \in X)\, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
- $(\forall x, y, z \in X)\, d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$

2 Topologie metrischer Räume

Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein in jedem metrischen Raum (X, d):

- $\emptyset$ ist offen.
- X ist offen.
- Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung zweier offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist offen.
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist offen.
- $\emptyset$ ist abgeschlossen.

- X ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x,y) > \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x,y) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

3 Kanonische Metrik im $\mathbb{R}^2$

Was ist der Euklidische Abstand im $\mathbb{R}^2$ der Punkte $\vec{x}$, $\vec{y}$, wobei die Punkte aus folgender Liste gewählt werden:

- $(0,0)$
- $(0,1)$
- $(1,0)$
- $(1,1)$
- $(3,3)$
- $(3,4)$
- $(4,3)$
- $(4,4)$
- $(0,-1)$
- $(-1,0)$
- $(-1,-1)$
- $(-3,-3)$
- $(-3,-4)$
- $(-4,-3)$
- $(-4,-4)$

4 De Morgan Regeln

Seien A, B und C_i (für $i \in I$) Teilmengen von X: Welche der folgenden Aussagen gilt für alle solche Mengen:

- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$
- $\bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$
- $\bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i)$
- $X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} C_i$
- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cup B) = A \cap B$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$
- $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$

5 Bild und Urbild

Sei $f : X \to Y$ und A, B Teilmengen von X und C, D von Y. Welche Aussagen gelten allgemein:

- $f''A \cup f''B = f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B = f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) = f''(A \setminus B)$
- $f''A \cup f''B \subseteq f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B \subseteq f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) \subseteq f''(A \setminus B)$
- $f''A \cup f''B \supseteq f''(A \cup B)$
- $f''A \cap f''B \supseteq f''(A \cap B)$
- $f''(A) \setminus f''(B) \supseteq f''(A \setminus B)$
- $f^{-1}C \cup f^{-1}D = f^{-1}(C \cup D)$
- $f^{-1}C \cap f^{-1}D = f^{-1}(C \cap D)$
- $f^{-1}C \setminus f^{-1}D = f^{-1}(C \setminus D)$

6 Verknüpfung von Funktionen

Welches h ist $f \circ g$ (wobei wir die natürlichen/maximalen Definitionsbereiche annehmen)?

- $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = e^x$
- $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3$
- $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$

- $h : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
- $h : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
- $h : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
- $h : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

7 Exponentiation und Logarithmus

Welche der folgenden Aussagen gilt für alle x, y in $\mathbb{R}$ und a, b in $\mathbb{R}^{>0}$:

- $e^{(x^y)} = e^{x \cdot y}$
- $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$
- $e^{x \cdot y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x \cdot y} = e^x + e^y$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$
- $a^x = \ln(a) \cdot e^x$
- $e^x = a^{x \cdot \ln(a)}$
- $\ln_a(x) = \ln(x) \cdot \ln(a)$

- $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $\ln_a(x) = \ln(x) + \ln(a)$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$
- $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x + y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$
- $\ln(x)^r = \ln(r \cdot x)$

- $\ln(x)^r = \ln(r) \cdot \ln(x)$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{-n} = \sqrt[n]{e}$
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
- $\ln(-x) = \frac{1}{\ln(x)}$
- $\ln(-x) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\ln(x)}$

8 Beispiele für (Un)stetigkeit

An welchen Punkten ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig? An welchen $x \cdot f(x)$?

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2022 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = |x|$

9 Eigenschaften stetiger Funktionen

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle stetigen $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $f''A$ ist ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$.
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A$ ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$.
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.
- Wenn $A = (a, b)$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.
- Wenn $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$.
- Wenn $A = [a, b]$ and $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$.
- Wenn $A = [a, b]$ und f injektiv, dann ist f streng monoton.
- Wenn f injektiv, dann ist f streng monoton.

10 Beispiele für Ableitungen

Leiten Sie ab:

- $\sin(ax+b)$ (für konstante a, b in $\mathbb{R}$)
- $\cos(ax+b)$ (für konstante a, b in $\mathbb{R}$)
- $\tan(x)$
- e^{ax+b} (für konstante a, b in $\mathbb{R}$)
- $\ln(ax+b)$ (für konstante a, b in $\mathbb{R}^{>0}$, und $x > 0$)
- $(ax+b)^r$ (für konstante a, b, r in $\mathbb{R}^{>0}$, $r \neq 0$, und $x > 0$)
- $\sin(e^x)$
- $e^{\sin(x)}$

11 Monotonie und Extrema

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Extremum hat.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f' bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist f bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton steigend.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f streng monoton steigend ist.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f streng monoton steigend ist, dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f monoton steigend.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f monoton steigend ist.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f monoton steigend ist, dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

12 Konkrete Funktionen

Sind die folgenden Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ (mit dem natürlichen Definitionsbereich A) injektiv, surjektiv, bijektiv, stetig, differenzierbar?

- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^{2022}}$
- $\frac{1}{x^{2023}}$
- x^{-2023}
- x^{-2022}
- x^{-2}
- x^{-1}
- $\ln(x)$
- $\ln(x^2)$
- $\ln(|x|)$
- $\ln(\frac{1}{x})$
- e^x
- $\frac{1}{e^x}$
- $|x|$
- $\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[2022]{x}$
- $\sqrt[2023]{x}$
- $\sqrt{|x|}$
- $\sqrt[3]{|x|}$
- $\sqrt[2022]{|x|}$
- $\sqrt[2023]{|x|}$
- $x^{\frac{1}{2}}$
- $x^{\frac{1}{3}}$
- $x^{\frac{1}{2022}}$
- $x^{\frac{1}{2023}}$
- $|x|^{\frac{1}{2}}$
- $|x|^{\frac{1}{3}}$
- $|x|^{\frac{1}{2022}}$
- $|x|^{\frac{1}{2023}}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{x}}$
- $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{|x|}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{|x|}}$
- $x^{-\frac{1}{2}}$
- $x^{-\frac{1}{3}}$
- $x^{-\frac{1}{2022}}$
- $x^{-\frac{1}{2023}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2}}$
- $|x|^{-\frac{1}{3}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2022}}$
- $|x|^{-\frac{1}{2023}}$
- $\sin(x)$
- $\sin(\cos(\sin(\cos(\sin(x)))))$
- $\sin(|x|)$
- $\cos(|x|)$

Hinweis: Differenzierbar heißt "auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar." $\frac{1}{x}$ ist z.B. differenzierbar (0 ist ja nicht im Definitionsbereich). Dagegen sind die Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ nicht differenzierbar (sie sind bei 0 definiert, aber nicht differenzierbar. Bei $x \neq 0$ sind sie natürlich schon differenzierbar). Achtung: $\sin(|x|)$ und $\cos(|x|)$ sind überall (auch bei 0) stetig. Sind sie bei 0 auch differenzierbar?

13 Limiten

Ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, oder undefiniert? (Wenn definiert, gib c an.) Dabei wird $f : A \to \mathbb{R}$ angenommen für das natürliche A.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(|x|)}{x^2}$
- $\lim_{x\to \infty} \sin(x)$
- $\lim_{x\to \infty} e^x$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x}$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x$
- $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$
- $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln(x)}$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x)}$

Achtung: Der Definitionsbereich von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und der von $\frac{\ln(x)}{x}$ etc nur $\mathbb{R}^{>0}$).