Finden der Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Mathematik 2 für Informatik

Version vom 12.06.2007, Marian Kogler

1 Beispiel

Man finde die Stammfunktion zu folgendem Gradientenfeld:
$\vec{f} = \begin{pmatrix} y^2 z \\ (2x-3y)yz \\ (x-y)y^2 \end{pmatrix}$

2 Lösung

Zuerst überprüft man, ob es eine Stammfunktion gibt:
$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2yz$
$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = y^2$
$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2xy - 3y^2$
also gibt es eine.
Nun integriert man f_1 nach x: $\int y^2 z dx$. Allerdings setzen wir hier statt der üblichen Konstante c eine beliebige Funktion in y und z, da wir diese beiden Variablen nicht berücksichtigt haben: $c(y,z)$. $\int y^2 z dx = xy^2 z + c(y,z)$. Das ist unsere vorläufige Stammfunktion: $F = xy^2 z + c(y,z)$. Die Stammfunktion muss nach y abgeleitet f_y ergeben. Wir können daher gleichsetzen: $\frac{\partial}{\partial y} xy^2 z + c(y,z) = (2x-3y)yz$, d.h. $2xyz + \frac{\partial}{\partial y} c(y,z) = (2x-3y)yz$. Die rechte Seite können wir jetzt ausmultiplizieren: $2xyz + \frac{\partial}{\partial y} c(y,z) = 2xyz - 3y^2 z$. Wir sehen jetzt, dass $\frac{\partial}{\partial y} c(y,z) = -3y^2 z$ sein muss. Um $c(y,z)$ selber zu erhalten, müssen wir $-3y^2 z$ nach y integrieren: $\int -3y^2 z dy = -3\frac{y^3}{3} z = -y^3 z + d(z)$. d(z) ist analog zu $c(x,y)$ eine beliebige Funktion in z. Unsere vorläufige Stammfunktion ist jetzt: $F = xy^2 z - y^3 z + d(z)$. Wie oben mit y leiten wir sie diesmal nach z ab und setzen sie mit f_z gleich: $\frac{\partial}{\partial z} xy^2 z - y^3 z + d(z) = (x-y)y^2$, also $xy^2 - y^3 + \frac{\partial}{\partial z} d(z) = (x-y)y^2$, rechte Seite ausmultiplizieren: $xy^2 - y^3 + \frac{\partial}{\partial z} d(z) = xy^2 - y^3$. $\frac{\partial}{\partial z} d(z)$ muss daher 0 sein, $d(z) = \int 0 dz = c$, wobei c diesmal eine echte Konstante ist. Unsere fertige Stammfunktion ist also $F = xy^2 z - y^3 z + c$. Zur Probe kann man die Stammfunktion dann nach x, y und z ableiten; das Ergebnis muss jeweils f_x, f_y und f_z sein.