6.0 VU Theoretische Informatik

2023W **15.4.2024**

Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe
	Lösung		**A**

Aufgabe 1

(a) [**10 Punkte**] Wir definieren das folgende Entscheidungsproblem:

> HelloWorld
> Instanz: Programm Π und ein Input String I.
> Frage: Gibt Programm Π bei Aufruf mit Input I den String "Hello World" aus?

Beweisen Sie mittels Reduktion vom Halteproblem, dass das HelloWorld Problem unentscheidbar ist. Zeigen Sie außerdem eine Richtung des Korrektheitsbeweises für die von Ihnen vorgeschlagene Reduktion R, nämlich: Wenn x eine positive Instanz des Halteproblems ist, dann ist $R(x)$ eine positive Instanz des HelloWorld Problems.

Aufgabe 2

Sei $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \to bacS \mid cab\} \cup \{xy \to yx \mid x, y \in \{a, b, c\}\}.$$

(a) [**4 Punkte**] Ist die Grammatik G regulär, kontextfrei, monoton, kontextsensitiv und/oder unbeschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Ja	Nein
regulär	☐	☐
kontextfrei	☐	☐
monoton	☐	☐
kontextsensitiv	☐	☐
unbeschränkt	☐	☐

(b) [**2 Punkte**] Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L = L(G)$ an.

(c) [**4 Punkte**] Ist $L(G)$ regulär, kontextfrei, kontextsensitiv und/oder rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Ja	Nein
regulär	☐	☐
kontextfrei	☐	☐
kontextsensitiv	☐	☐
rekursiv aufzählbar	☐	☐

(d) [**2 Punkte**] Kann $\overline{L}$, also das Komplement von L, von einer Turingmaschine akzeptiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Die Funktion f vom Typ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $f = \mathbf{Pr}(C_3^1, + \circ (P_2^3, P_3^3))$.

(a) [**4 Punkte**] Werten Sie f für die Eingabewerte $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ und $(3, 2)$ aus.

(b) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch f dargestellt?

(c) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch $\mu_0 f$ (alte Schreibweise: μf) dargestellt?

(d) [**2 Punkte**] Welche Funktion wird durch $\overline{\mu} f$ dargestellt?
Hinweis: Die adäquate Darstellung benötigt eine dreifache Fallunterscheidung.

(e) [**2 Punkte**] Ist es entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine M die Funktion f berechnet? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
Anmerkung: Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort.

Aufgabe 4

Wir haben vier Entscheidungsprobleme gegeben: P_1, P_2, P_3, P_4. Wir wissen, dass $P_1 \in \mathbf{P}$, $P_3 \in \mathbf{NP}$ und P_4 **NP**-hart ist (über P_2 ist nichts bekannt). Welche *zusätzlichen* Aussagen über P_1, P_2, P_3 und P_4 können wir bzgl. der Komplexitätsklassen **P** und **NP** treffen wenn jeweils folgende polynomielle many-one Reduktionen gelten:

(a) [**3 Punkte**] $P_2 \leq_R P_1$ und $P_3 \leq_R P_2$

(b) [**3 Punkte**] $P_1 \leq_R P_2$ und $P_2 \leq_R P_3$

(c) [**3 Punkte**] $P_2 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_4$

(d) [**3 Punkte**] $P_4 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_2$

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe der Annotierungsregeln, dass die folgende Korrektheitsaussage wahr hinsichtlich totaler Korrektheit ist. Verwenden Sie $x{*}m \leq n < y{*}m \land m > 0$ als Invariante und $y{-}x$ als Variante.

Einige Annotierungsregeln:

$\{F\}v \coloneqq e \quad \mapsto \quad \{F\}v \coloneqq e\{\exists v'(F\left[{v' \atop v}\right] \land v = e\left[{v' \atop v}\right])\}$

`if` e `then` $\{F\} \cdots$ `else` $\{G\} \quad \mapsto \quad \{(e \supset F) \land (\neg e \supset G)\}$`if` e `then` $\{F\} \cdots$ `else` $\{G\}$

$\{F\}$`if` e `then` $\cdots$ `else` $\quad \mapsto \quad \{F\}$`if` e `then` $\{F \land e\} \cdots$ `else` $\{F \land \neg e\}$

`while` e `do` $\cdots \quad \mapsto \quad \{Inv\}$`while` e `do` $\{Inv{\land}e{\land}t{=}t_0\} \cdots \{Inv{\land}(e \supset 0{\leq}t{<}t_0)\}\{Inv{\land}\neg e\}$

$\{\, m > 0 \land n \geq 0 \,\}$
{{
$x \coloneqq 0$;
$y \coloneqq n + 1$};
while $x + 1 \neq y$ do {
    $z \coloneqq (x + y)/2$;
    if $z * m > n$ then
        $y \coloneqq z$
    else
        $x \coloneqq z$;
    // end if
}}
$\{\, x * m \leq n < (x + 1) * m \,\}$