Mathematik III

Vorlesung 2, 13.10.2006

Markus Nemetz

Oktober 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
19.10.2006

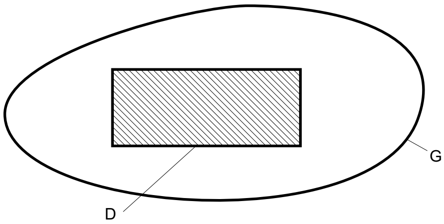
2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$.

$f(x, y)$ ist stetig und erfüllt eine lokale L-Bedingung bezüglich y. Anmerkung: Wenn $f(x, y)$ stetig nach y differenzierbar ist, dann erfüllt es eine lokalen L-Bedingung bezüglich y.

In diesem Fall gilt für den Rechtecksbereich D, der vollständig in G liegt:: Lipschitz-Konstante

$$L = max\,|f_y(x, y)| \qquad (y \in D)$$



Betrachten die Beweisidee vom Existenz- und Eindeutigkeitssatz - **Picard-Iteration**:

$$\begin{gathered} y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \text{Integrieren} \\ \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \\ y|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \\ \Rightarrow \mathbf{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt} \qquad \text{'Integralgleichung'} \end{gathered}$$

Wir wollen $y(x)$ durch die Funktion $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ approximieren:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \qquad \text{konstante Funktion} \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \end{aligned}$$

$$\vdots \qquad \text{iterieren}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt$$

Die Funktionenfolge $y_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots$ konvergiert unter der Voraussetzung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes in einem Intervall $y_0 - \varepsilon \leq x \leq y_0 + \varepsilon$ gleichmässig gegen die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$, die auch die Lösung des Anfangswertproblems ist.

Beispiel: Die bekannte Lösung des AWP $y' = xy, y(0) = 1$, wird mittels Picard-Iteration approximiert ($f(x,y) = xy, y_0 = 0, y_0 = 1$):

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_0(t)\,dt \ = 1 + \frac{x^2}{2} \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_1(t)\,dt \ = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_2(t)\,dt \ = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} \\
y_4(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_3(t)\,dt \ = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384}
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt dies

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{2k}}{2^k k!}$$

$y_n(x)$ mit $n \to \infty$ konvergiert gegen die Lösung

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{2^k k!}$$

Dies kann man dadurch verifizieren, dass man $y' = xy$ auf $\frac{y'}{y} = x$ umformt und aus dieser 'trennbaren Differentialgleichung' die Lösung mittels 'Trennung der Veränderlichen' errechnet:

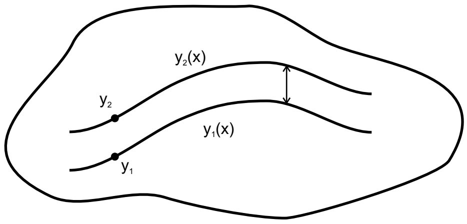
$$\log y(x) = \frac{x^2}{2} + \widetilde{c} \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad ce^{\frac{0^2}{2}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \underbrace{=}_{\text{Taylorreihe}} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(\frac{x^2}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{x^2}{2})^3}{3!} + \dots$$

$$e^x \underbrace{=}_{\text{Taylorreihe}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Die **stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten** besagt, dass sich zwei Lösungen auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ wenig unterscheiden, sobald nur die beiden Anfangswerte bei a hinreichend nahe beieinanderliegen.

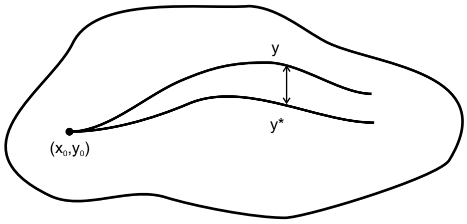


Wenn eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine L-Bedingung ($L > 0$) erfüllt, kann man den Abstand zwischen zwei in G verlaufenden Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ wie folgt abschätzen:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

Je grösser L ist, desto weiter werden die Lösungen auseinander liegen!

Vereinfacht gesagt bedeutet die **stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite**, dass kleine Änderungen der rechten Seite f bei gleichen Anfangsbedingungen auch nur eine kleine Änderung der Lösung bewirken.



Wenn eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine L-Bedingung ($L > 0$) erfüllt und sich f^* auf G nur um ε ($|f(x,y) - f^*(x,y)| < \varepsilon | \forall (x,y) \in G$) unterscheiden, dann gilt für die Lösungen $y(x)$ von $y' = f(x,y)$ und $y^*(x)$ von $y' = f^*(x,y)$, mit derselben Anfangsbedingung $y(x_0) = y^*(x_0) = y_0$ im Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ die Abschätzung:

$$|y(x) - y^*(x)| \leq \varepsilon \delta e^{L(x-x_0)}$$

3 Differentialgleichungen: Spezielle Typen

3.1 Trennbare Differentialgleichungen

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

$$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion ($x, x_0 \in I,\ y, y_0 \in J$):

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta,\ x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen ($x_0 \in I,\ y_0 \in J$) besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder
2. $|g(y)| < L \cdot |y - y0|$ in einer Umgebung von y_0, $L > 0$ konstant (`Lipschitz`).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung
2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\, dx.$$

   Allgemeine implizite Lösung lautet:

$$G(y) - F(x) = x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c - 0$ nach y auflösen.

   Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

3.2 Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentalgleichungen stellen eine spezielle Form der Differentialgleichungen 1. Ordnung dar und entstehen durch Differentiation nach der Kettenregel aus $U(x,y) = const.$. Ihre implizite Form lautet

$$U_x(x,y) + U_y(x,y)y' = 0,$$

und die explizite für $U_y \neq 0$:

$$y' = -\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y}$$

Normalerweise ist die Exaktheit einer Differentialgleichung nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

ist dann exakt, wemm es eome Funktion U gibt, so dass gilt:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = A, \qquad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

$\mathbf{U}$ ist dann die **Stammfunktion von $\mathbf{A(x,y) + B(x,y)y' = 0}$** (und ist nichts anderes als die Stammfunktion des Vektorfeldes

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}$$

Der **Exaktheitstest** ergibt für $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ genau dann ein positives Resultat, wenn folgende **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{y}A(x,y) = \frac{\partial}{x}B(x,y)$$

Allgemein lautet die **Lösungsmethode für exakte Differentialgleichung der Form A(x,y) + B(x,y)y' = 0**:

1. Bestätigen von

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

2. Bestimmung einer Stammfunktion über den Ansatz $u_x = A$, $U_y = B$:

(a) A unbestimmt nach x integrieren

$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y)$$

(b) y partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen:

$$U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B$$

(c) $c(y)$ durch Integration nach y bestimmen

Allgemeine implizite Lösung: $U(x,y) = const.$

3. Implizite Lösung ist $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ - wenn möglich nach y auflösen und Definitionsbereich bestimmen.

3.3 Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x,y)$ in die exakte Differntialgleichung

$$M(x,y) \cdot A(x,y) + M(x,y) \cdot B(x,y)y' = 0$$

über. $M(x,y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.

Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x,y) = m(u(x,y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann.

2. Wenn $u(x,y)$ nicht explizit vorgegeben, Auswahl verschiedener Funktionen $u(x,y)$ und dazu Berechnung von

$$H(x,y) := \frac{Ay - Bx}{BU_x - Au_y}$$

Wenn $H(x,y) = h(u(x,y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x,y)$ wählen.

Standard-Ansätze für $u(x,y)$:

$\mathbf{u(x,y)}$	$\mathbf{H(x,y)}$
x	$\frac{A_y - B_x}{B}$
y	$\frac{A_y - B_x}{-A}$
$x+y$	$\frac{A_y - B_x}{B-A}$
$x-y$	$\frac{A_y - B_x}{B+A}$
xy	$\frac{A_y - B_x}{yB-yA}$
y^2+y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB-yA}$
x^2-y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB+yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u)\,du}$. $M(x,y) = m(u(x,y))$ ist der Euler-Multiplikator

4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x,y) \cdot A(x,y) + M(x,y) \cdot B(x,y)y' = 0$