Mathematik 1 für Informatik — Übungsbeispiele

1) Zeigen Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist.

2) Zeigen Sie, daß $\sqrt{5}$ irrational ist.

3) Zeigen Sie, daß $\sqrt{6}$ irrational ist.

4) Zeigen Sie, daß $\sqrt{10}$ irrational ist.

5) Zeigen Sie, daß $\sqrt{30}$ irrational ist.

6) Zeigen Sie, daß $\sqrt{42}$ irrational ist.

7) Man überprüfe die Gleichung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die ersten fünf natürlichen Zahlen und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

8) Man zeige mittels vollständiger Induktion, daß für die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 8k$ für $k \geq 1$ allgemein gilt:

$$x_n = (2n-1)^2, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

9) Man zeige mittels vollständiger Induktion, daß für die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 18k + 15$ für $k \geq 1$ allgemein gilt:

$$x_n = (3n+1)^2, \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

10) Nach der sogenannten „abessinischen Bauernmethode“ werden zwei Zahlen, z.B. 21 und 17, wie folgt multipliziert:

21	17
~~10~~	~~34~~
5	68
~~2~~	~~136~~
1	272
	357

Dabei wird der erste Faktor laufend durch 2 dividiert (und der Rest dabei vernachlässigt), während der zweite Faktor stets verdoppelt wird. Nach dem Motto der abessinischen Bauern „Gerade Zahlen bringen Unglück“ streicht man nun alle Zeilen, in denen die Zahl in der ersten Spalte gerade ist. Die Summe der verbleibenden Zahlen in der zweiten Spalte liefert dann das Ergebnis $21 \cdot 17 = 357$.
Man begründe, warum diese Methode zum richtigen Resultat führt. (Hinweis: Man gehe von einer Darstellung des ersten Faktors im Binärsystem aus.)

11) Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 3 teilbar – mittels eines direkten Beweises.

(b) Ist die Summe $m + n$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist genau einer der beiden Summanden ungerade – mittels eines indirekten Beweises.

(c) Ist das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch n gerade – mittels eines Beweises durch Kontraposition.

(d) Die Aussage von (a) – mittels eines Beweises durch vollständige Induktion.

12–22) Man beweise mittels vollständiger Induktion:

12)

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (n \geq 2)$$

13)

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 6n + 4) \quad (n \geq 1)$$

14) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 1)$

15) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n} \quad (n \geq 2)$

16) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j2^j = 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad (n \geq 0)$

17) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4} \quad (n \geq 1)$

18)

$$\sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) \quad (n \geq 1)$$

19)

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

20) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

21) Ist $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ und $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$L_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

22) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

23–26) Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt:

23) $9n^3 - 3 \leq 8^n$

24) $4n^2 \leq 2^n$

25) $3n + 2^n \leq 3^n$

26) $(n+1)3^n \leq 4^n$

27) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{j=1}^{k} b_j$.

28) Wo steckt der Fehler im „Beweis“ der folgenden Behauptung:
Ist in einer Gruppe von Personen eine Person blond, so sind alle blond.
Beweis: a) $n = 1$: Hier stimmt die Behauptung trivialerweise.
b) Die Behauptung gelte für Gruppen der Größe n.
Nun sei von $n+1$ Personen eine blond. Betrachte man diese Person zusammen mit $n-1$ weiteren. Dann sind nach Induktionsannahme diese $n-1$ Personen auch blond. Folglich ist in der Gruppe dieser $n-1$ Personen zusammen mit der noch nicht betrachteten Personen wieder wenigstens eine blond, woraus folgt, daß auch diese letzte Person blond sein muß.

29) Wo steckt der Fehler im „Beweis“ der folgenden Behauptung:
Je zwei natürliche Zahlen a, b sind gleich groß.

Beweis: Vollständige Induktion nach dem $\max\{a,b\}$.
a) $\max\{a,b\}=0$: Hier gilt $a=b=0$.
b) Die Behauptung gelte für $\max\{a,b\}=n$.
Sei nun $\max\{a,b\}=n+1$. Dann ist $\max\{a-1,b-1\}=n$, und es folgt aus der Induktionsvoraussetzung b), daß $a-1=b-1$ ist, womit aber auch $a=b$ gilt.

30) Man zeige, daß in $\mathbb{R}$ die Beziehung

$$\sqrt{5041}-\sqrt{5040}=71-12\sqrt{35}=\frac{1}{71+12\sqrt{35}}$$

gilt. Was ergibt sich bei Rechnung in normalisierter Gleitkomma-Darstellung zur Basis 10 mit vierstelliger Mantisse?

31) Man finde alle sechsten Wurzeln von $z=8i$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

32) Man finde alle sechsten Wurzeln von $z=-27$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

33) Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1=3-4i$ und $z_2=[2,\frac{\pi}{2}]$.

34) Wie bei 33) für $z_1=4+5i$ und $z_2=[2,-\frac{\pi}{4}]$.

35) Wie bei 33) für $z_1=5+2i$ und $z_2=[3,\frac{\pi}{2}]$.

36) Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r,\varphi]$.

37) Wie bei 36) für $\sqrt[5]{18-6\sqrt{3}i}$.

38) Wie bei 36) für $\sqrt[3]{-i}$.

39) Wie bei 36) für $\sqrt[5]{\sqrt{2}-\sqrt{6}i}$.

40) Man beweise $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ und $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

41) Man beweise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

42) Stellen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2+2z+4=0$ sowohl in der Form $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinatenform $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r\geq 0$, $0\leq\varphi<2\pi$, dar.

43) Wie Bsp. 42) für $z^2+4z+8=0$.

44) Für welche komplexe Zahlen gilt $\overline{z}=\frac{1}{z}$?

45) Man zeige $\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2=\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

46) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0$ erfüllen ($a,b\in\mathbb{C}$, $b\neq 0$).

47) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0$ erfüllen ($a,b\in\mathbb{C}$, $b\neq 0$).

48–49) Welche Teilmenge der komplexen Zahlenebene beschreibt die angegebene Ungleichung?

48) $\left|\frac{z+4}{z-4}\right|<3$

49) $\left|\frac{z+5}{z}\right|<4$

50) Man berechne alle Werte von $\sqrt{7+24i}=a+ib$ ohne Benützung der trigonometrischen Darstellung. (Hinweis: Man quadriere die zu lösende Gleichung und vergleiche Real- und Imaginärteile.)

51) Wie Bsp. 50) für $\sqrt{8-6i}=a+ib$.

52) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(7469,2464)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

53) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(1109,4999)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

54) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2008,6318)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

55) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2007,8367)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

56) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2107,9849)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

57) Man bestimme zwei ganze Zahlen x,y, welche die Gleichung $243x+198y=9$ erfüllen.

58) Man bestimme zwei ganze Zahlen x,y, welche die Gleichung $451x+176y=11$ erfüllen.

59) Man zeige für natürliche Zahlen a,b die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(a,b)\cdot\mathrm{kgV}(a,b)=a\cdot b$.

60) Man zeige, daß jede ganze Zahl der Form n^4+4^n (mit $n>1$) keine Primzahl ist.
(Hinweis: Man unterscheide zwischen geradem und ungeradem n. Insbesondere betrachte man bei ungeradem n die Zerlegung $(n^2+2^n+n2^{(n+1)/2})(n^2+2^n-n2^{(n+1)/2})$.)

61) Sei n eine beliebige positive natürliche Zahl und $N=12n-1$. Man zeige, daß die Summe aller Teiler von N durch 12 teilbar ist.

62–67) Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d. h. Gleichungen in Restklassen in $\mathbb{Z}$) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

62) a) $8x\equiv 4 \pmod{16}$, b) $8x\equiv 4 \pmod{15}$.

63) a) $6x\equiv 3 \pmod 9$, b) $6x\equiv 4 \pmod 9$.

64) a) $3x\equiv 9 \pmod{11}$, b) $3x\equiv 9 \pmod{12}$.

65) a) $x^2\equiv 1 \pmod 3$, b) $x^2\equiv 1 \pmod 5$.

66) a) $x^2\equiv 2 \pmod 5$, b) $x^2\equiv 2 \pmod 7$.

67) a) $x^2-3x+2\equiv 0 \pmod 5$, b) $x^2-3x+2\equiv 0 \pmod 6$.

68) Man beweise die folgenden Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen:

(a) $a\equiv b \mod m,\ c\equiv d \mod m \Rightarrow a+c\equiv b+d \mod m$

(b) $a\equiv b \mod m,\ c\equiv d \mod m \Rightarrow a\cdot c\equiv b\cdot d \mod m$

(c) $ac\equiv bc \mod mc,\ c\neq 0 \Rightarrow a\equiv b \mod m$

69) Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\,a_2\ldots a_{12}\,p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p im EAN-Code so bestimmt, daß

$$a_1+3a_2+a_3+3a_4+\cdots+a_{11}+3a_{12}+p\equiv 0 \mod 10$$

gilt. Man zeige, daß beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.

70) Sei a die Aussage *Es gibt eine größte natürliche Zahl.* und b die Aussage 0 *ist die größte natürliche Zahl.* Man entscheide, ob die Aussagen $a\to b$ bzw. $b\to a$ wahr oder falsch sind.

71) Man bestimme alle $m, n \in \mathbb{N}$, für welche die Prädikate $P(n)$ bzw. $P(m,n)$ in eine wahre Aussage übergehen.

(a) $P(n) : n! \leq 10n$

(b) $P(n) : (n^2 - 5n - 6 \geq 0) \to (n \leq 10)$

(c) $P(n,m) : (m = n!) \to (m \text{ ist durch 10 teilbar})$

72–77) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Äquivalenzen richtig sind.

72) $a \vee (b \vee c) \Longleftrightarrow (a \vee b) \vee c$ **73)** $a \vee (a \wedge b) \Longleftrightarrow a$

74) $a \wedge (b \vee c) \Longleftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ **75)** $(a \wedge \neg b) \wedge \neg c \Longleftrightarrow a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$

76) $a \Leftrightarrow b \Longleftrightarrow (a \Rightarrow b) \to \neg(b \Rightarrow a)$ **77)** $\neg(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow a \wedge \neg b$

78–86) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen mit Hilfe von Elementtafeln oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

78) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **79)** $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

80) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **81)** $(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$

82) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **83)** $(A \triangle B)' = A' \triangle B'$

84) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

85) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ **86)** $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

87) Man zeige, daß es sich bei dem logischen Ausdruck

$$[(B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge A] \to C$$

um eine Tautologie bzw. bei dem Ausdruck

$$(A \to C) \wedge (C \to B) \wedge A \wedge \neg B$$

um eine Kontradiktion handelt.

88) Man beweise, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind. (D. h., gilt eine der drei Aussagen, dann gelten alle drei.)

$$\text{(i) } A \subseteq B, \qquad \text{(ii) } A \cup B = B, \qquad \text{(iii) } A \cap B = A.$$

89) Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung.

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} :\ x < y$

(b) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} :\ x < y$

(c) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} :\ y < x$

(d) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} :\ y < x$

90) Sei $T \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Unter welchen beiden Voraussetzungen an T garantiert das Induktionsaxiom (nach Peano) $T = \mathbb{N}$?

(b) Geben Sie eine verbale Formulierung für die durch folgende Formel ausgedrückte Eigenschaft einer Menge $T \subseteq \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}((\forall k \in \mathbb{N}(k < n \to k \in T)) \to n \in T)$$

(c) Kann man aus der Eigenschaft in (b) stets auf $T = \mathbb{N}$ schließen?

(d) Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. Zeigen Sie mittels Induktion $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

91–94) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten für Mengen:

91) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$. **92)** $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$.

93) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$. **94)** $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

95) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie, daß M gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl besitzt, indem Sie ein Verfahren angeben, das aus den Teilmengen der einen Art umkehrbar eindeutig die der anderen Art erzeugt.

96) Es sei A eine Menge mit n Elementen und $P(A)$ die Menge aller Teilmengen der Menge A. Zeigen Sie, daß $P(A)$ 2^n Elemente besitzt.

97) Sei $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ und R binäre Relation auf A definiert durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ oder } \mathrm{ggT}(a,b) = 2,\ \forall a, b \in A.$$

Man gebe explizit die Relation R sowie ihren Graphen G_R an.

98) Man untersuche nachstehend angeführte Relationen $R \subseteq M^2$ in Hinblick auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:

(a) $M =$ Menge aller Einwohner von Wien (Volkszählung 2001), $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist verheiratet mit b

(b) M wie oben, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist nicht älter als b

(c) M wie oben, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist so groß wie b

(d) $M = \mathbb{R}$, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a - b \in \mathbb{Z}$

(e) $M = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n)\,R\,(y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_i \leq y_i\ \forall i = 1, \ldots, n$

99) Man zeige, daß durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; 3 \mid a^2 - b^2 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

100) Man zeige, daß durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; 6 \mid a^2 - b^2 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

101–106) Stellen Sie die folgenden Relationen im cartesischen Koordinatensystem und auch als gerichteten Graphen dar und untersuchen Sie weiters, ob eine Äquivalenzrelation vorliegt.

101) Die Relation R sei für $m, n \in \{2, 3, 4, 5\}$ definiert durch $mRn \Leftrightarrow m+n$ ungerade oder $m = n$.

102) $mRn \Leftrightarrow m + n$ gerade, $m, n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

103) $mRn \Leftrightarrow m - n$ ungerade oder $m = n$, $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

104) $mRn \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(m, n) = 1$, $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m, n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

105) $mRn \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(m, n) = 2$, $m, n \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m, n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

106) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$ ($\triangle$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

107) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \triangle B = A$ ($\triangle$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

108) Sei $f : A \to B$. Man zeige, daß durch $x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf der Menge A definiert wird.

109) Seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf der Menge M. Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Äquivalenzrelation auf M ist.

110) Sei T_{70} die Menge aller natürlichen Zahlen, die 70 teilen. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $\langle \mathbf{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$ und $\langle T_{70}, | \rangle$.

111) Sei $mRn \Leftrightarrow |m| \leq |n|$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Ist R eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$?

112) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$ auf der Potenzmenge einer Menge M eine Halbordnung bildet und zeichnen Sie gegebenenfalls das Hassediagramm.

113) Für $k, n \in \{1, 3, 4, \ldots, 10\}$ sei kRn, falls k ein Teiler von n ist und k und $\frac{n}{k}$ teilerfremd sind. Man untersuche, ob die Relation R eine Halbordnung ist und ermittle gegebenfalls das Hassediagramm.

114) Wie Bsp. 113) für $k, n \in \{2, 3, 4 \ldots, 10\}$.

115) Seien R_1 und R_2 Halbordnungen auf der Menge M. Man beweise, daß dann auch ihr Durchschnitt $R = R_1 \cap R_2$ Halbordnung auf M ist.

116–118) Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität haben folgende Relationen R auf $\mathbb{Z}$:

116) $mRn \Leftrightarrow m^2 = n^2$?

117) $mRn \Leftrightarrow m^4 = n^4$?

118) $mRn \Leftrightarrow m = n^2$?

119) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \preceq w = c + id$, falls $a < c$ oder ($a = c$ und $b \leq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \preceq z_2$ und $z_3 \succeq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

120) Man zeige: $(\mathbb{C}, \preceq)$ ist Halbordnung mit $z = a + ib \succeq w = c + id$, falls $a > c$ oder ($a = c$ und $b \geq d$). Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die $z_1 \succeq z_2$ und $z_3 \preceq 0$, aber $z_3 z_1 \succeq z_3 z_2$ gelten.

121–125) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen $R \subseteq A \times B$ um Funktionen, injektive Funktionen, surjektive Funktionen bzw. bijektive Funktionen handelt. ($\mathbb{R}^+$ bezeichnet die Menge aller positiven reellen Zahlen.)

121) $R = \{(\sqrt{x}, \frac{1}{x}) |\ x \in \mathbb{R}^+\}, A = B = \mathbb{R}^+$.

122) $R = \{(x^2, \frac{1}{x^2}) |\ x \in \mathbb{R}^+\}, A = B = \mathbb{R}$.

123) Wie 122) jedoch $A = B = \mathbb{R}^+$.

124) $R = \{(\log_2 x, x) | x \in \mathbb{R}^+\}, A = B = \mathbb{R}$.

125) $R = \{(\log_3 x, x^2) | x \in \mathbb{R}^+\}, A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}^+$.

126) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität hat die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$?

$$mRn \Longleftrightarrow f(m) = f(n)\ ?$$

Unter welcher Voraussetzung an die Funktion f ist die Relation R auch antisymmetrisch? Ist R eine Äquivalenzrelation? Falls ja, bestimmen Sie auch die durch R induzierte Partition auf $\mathbb{Z}$ für die Funktionen

(a) $f(x) = 3x$,

(b) $f(x) = x \mod 3$,

(c) $f(x) = x^2$.

127) Auf den Mengen $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien die binären Relationen $f_A := \{(x, 2x) \mid x \in A\}$ und $g_A := \{(2x, x) \mid x \in A\}$ gegeben.

(a) Für welche A gilt $g_A : A \to A$, d.h. wann handelt es sich bei g_A um eine Funktion?

(b) Für welche A ist f_A eine Funktion, wann sogar injektiv, surjektiv, bijektiv?

(c) Sind $f \subseteq A \times B$ und $g \subseteq B \times C$ Relationen, so ist (analog zur Komposition von Abbildungen) das Relationenprodukt $g \circ f \subseteq A \times C$ definiert als Relation $\{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in f, (b, c) \in g\}$. Beschreiben Sie $g_A \circ f_A$.

(d) Sei $f \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Begründen Sie mittels Induktion, dass die rekursive Definition der Iterationen f^n, $n \in \mathbb{N}$, durch $f^0 := \{(x, x) | x \in A\}$ und$f^{n+1} := f \circ f^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f^n : A \to A$ definiert, sofern $f : A \to A$ (f also selbst eine Funktion ist).

128) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektive Abbildungen. Man zeige, daß dann auch $h = g \circ f : A \to C$ injektiv ist. ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)

129) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektive Abbildungen. Man zeige, daß dann auch $h = g \circ f : A \to C$ surjektiv ist. ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)

130) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie, daß aus der Surjektivität von $g \circ f$ die Surjektivität von g und aus der Injektivität von $g \circ f$ die Injektivität von f folgt.

131) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen, sodaß $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist. Man zeige, daß dann auch f surjektiv ist.

132) Zu den nachstehenden Abbildungen f bzw. g auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$ bestimme man jeweils den zugehörenden Graphen und untersuche die angegebene Zuordnung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f(x) = x^2 \mod 10$, (b) $g(x) = x^3 \mod 10$.

133) Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y = \dfrac{2x+1}{x-7}$ bijektiv ist und bestimme ihre Umkehrfunktion.

134) Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y = \dfrac{10x+1}{6-x}$ bijektiv ist und bestimme ihre Umkehrfunktion.

135) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,9\,1\,7\,2\,5\,4\,3\,6 \end{pmatrix}.$$

136) Sei eine Permutation π von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in zweizeiliger Darstellung gegeben. Unter der Inversionstafel von π versteht man die Folge $(b_1, \ldots, b_n)$, wobei $b_k \geq 0$ angibt, wieviele größere Zahlen in der zweiten Zeile links vom Element k stehen. Bestimmen Sie für die Permutation π aus Aufgabe 135) die Inversionstafel.
Wie kann man bei Kenntnis der Inversionstafel die Permutation rekonstruieren? Demonstrieren Sie ein geeignetes Verfahren am obigen Beispiel.

137) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 3\,5\,8\,7\,6\,9\,4\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

138) Man bestimme zu den Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

die Permutationen $\sigma \circ \rho^2$ und $\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma^2$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

139)

(a) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (1346)$, $\rho = (134562)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6. Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$.

(b) Man schreibe die folgenden Permutationen in Zyklendarstellung bzw. als Produkt von Transpositionen, und gebe deren Vorzeichen an:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 9 & 5 & 8 & 1 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

140) Gegeben seien die folgenden Permutationen der S_8:

$$\pi = (13746), \quad \rho = (143652) \quad \text{und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi^2\rho\sigma^{-2}$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

141) Untersuchen Sie, ob π eine Permutation festlegt und geben Sie gegebenenfalls den Graphen, die Zyklendarstellung, sowie die Zyklendarstellung ohne Klammern an:

$$\pi(k) = 4k + 2 \bmod 10, \;\; 0 \leq k \leq 9.$$

142) Man untersuche, ob die Funktionen $f(x) = x^2 \bmod 10$ bzw. $g(x) = x^3 \bmod 10$ auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$ bijektiv sind, d.h. Permutationen festlegen.

143) Schreiben Sie π aus Aufgabe 143 als Produkt von Zweierzyklen.

144) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ durch Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

145) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ mit Hilfe der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

146) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 gibt es, bei denen genau 5-mal der Buchstabe `a`, 14-mal `b`, 5-mal `c`, 3-mal `d` vorkommen und genau einmal `e` vorkommt?

147) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 23 verschiedengroße Kugeln so zu färben, daß 9 rot, 5 schwarz, 4 blau, 4 grün sind und eine weiß ist?

148) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 aus den Buchstaben `a`, `b` gibt es, die genau 5-mal `a` enthalten und zwischen je zwei `a` mindestens 3-mal den Buchstaben `b`?

149) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 32-bändigen Lexikon genau 7 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens einer im Regal stehen bleiben soll?

150) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 50-bändigen Lexikon genau 6 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens drei im Regal stehen bleiben sollen?

151) Jemand wirft $2n$-mal eine Münze. Wieviele verschiedene Spielverläufe gibt es, wenn gleich oft Kopf wie Adler auftreten soll?

152) Wieviele Permutationen π von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, mit $\pi(k) \leq k+1$ für alle $1 \leq k \leq n-1$?

153) Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei (voneinander unterscheidbare) Würfel so zu werfen, daß genau zwei dieselbe Augenzahl zeigen?

154) Man bestimme die Anzahl der möglichen Tototips (`1`, `2`, `x`) bei 12 Spielen und die Anzahl der möglichen richtigen Zehner. (D. h. die Anzahl derjenigen Tips, die mit einer vorgegebenen Kolonne an genau 10 der 12 Stellen übereinstimmen.)

155) Man bestimme die Anzahl der möglichen „6 aus 45“-Lottotips und die Anzahl der möglichen richtigen Vierer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 4 Elemente gemeinsam haben).

156) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben).

157) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer mit Zusatzzahl (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben und deren sechstes Element einen vorgegebenen Wert außerhalb der 6-elementigen Menge hat).

158) Wie viele verschiedene Tips müssen beim Lotto „6 aus 45“ abgegeben werden, um sicher einen Sechser zu erzielen? Wie viele verschiedene Tips führen zu keinem Gewinn (d.h., diese Tip enthalten maximal zwei richtige Zahlen), bei wie vielen möglichen Tips stimmt mindestens eine Zahl, bei wie vielen sind alle Zahlen falsch?

159) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie: M besitzt gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl.

160) Wieviele natürliche Zahlen $n < 100\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau dreimal die Ziffer drei?

161) Wieviele natürliche Zahlen $n < 1000\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau viermal die Ziffer zwei?

162) Bei einer schriftlichen Prüfung treten k Personen an. Es steht eine lange Bank mit n (der Reihe nach durchnummerierten) Sitzen nebeneinander zur Verfügung. Die Sitze müssen so belegt werden, dass zwischen zwei Personen jeweils zwei freie Plätze bleiben. Eine erlaubte Belegung B soll also aufgefasst werden als eine Menge $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $b_{i+1} > b_i + 2$.

(a) Wie groß muss (zu gegebenem k) n mindestens sein, damit eine erlaubte Belegung existiert?

(b) Bezeichne $M(t, m)$, $t, m \in \mathbb{N}$, die Menge aller t-elementigen Teilmengen einer m-elementigen Menge ($t, m \in \mathbb{N}$). Wie errechnet sich $|M(t, m)|$? (Unterscheiden Sie die Fälle $t \leq m$ und $t > m$.)

(c) Wählen Sie t und m geeignet und geben Sie eine Bijektion zwischen der Menge aller erlaubten Belegungen und $M(t, m)$ an.

(d) Schließen Sie damit auf die Anzahl aller erlaubten Belegungen (unter der Voraussetzung aus (a)).

163) Bezeichne N die Menge $\{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, und S_n die Menge aller Bijektionen $f : N \to N$.

(a) Sei A die Anzahl aller n-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{1, \ldots, n\} = N$, B die Anzahl der Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $a_i \in N$, C die der Elemente von S_n. Ordnen Sie die Zahlen A, B, C der Größe nach.

(b) Geben Sie Formeln für A, B und C an.

(c) Wieviele $f \in S_n$ gibt es, die $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ ($m \leq n$) invariant lassen, d.h. die $f(i) \leq m$ für alle $i \leq m$ erfüllen.

164) Man beweise nachstehende Identitäten für Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

165) Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.)

166) Zeigen Sie die folgende Formel von *Vandermonde*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

für $x, y, n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1+z)^x(1+z)^y = (1+z)^{x+y}$.

167) Zeigen Sie die Formel von Vandermonde aus Bsp. 166 mit Hilfe kombinatorischer Deutung.

168) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}$$

für alle $x \geq 1$ und $x \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1+z)^x \cdot \frac{1}{1+z} = (1+z)^{x-1}$.

169–172) Berechnen Sie unter Benützung des Binomischen Lehrsatzes (und ohne Benützung der Differentialrechnung):

169)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 4^k$$

170)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 5^k$$

171)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

172)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) 2^k$$

173) Eine Datei enthalte 7 Datensätze vom Typ A, 4 vom Typ B, 6 vom Typ C, 2 vom Typ D und 3 vom Typ E. Sie soll so in eine doppelt verkettete Liste sortiert werden, daß die Randelemente (erster und letzter Satz) nur Sätze der Typen A oder E sein dürfen. Weiters sollen zwischen zwei Datensätzen desselben Typs keine Sätze anderen Typs stehen. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

174) Wie viele verschiedene Variablennamen kann man in einer fiktiven Programmiersprache verwenden, wenn diese Namen aus mindestens einem, höchstens aber vier (nicht notwendig verschiedenen) Buchstaben $\{\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ bestehen müssen, und die Befehle AND, OR, IF, THEN und GOTO nicht als Teilwörter enthalten sei dürfen.

175) Wieviele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Kästchen zu verteilen, wenn jedes Kästchen beliebig viele Kugeln (einschließlich 0) aufnehmen kann?

176) Ein Turm soll auf einem Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen. Wieviele verschiedene Wege gibt es, wenn der Turm nie nach links oder unten ziehen darf, d. h. in jedem Schritt nur ein oder mehrere Felder nach rechts oder nach oben.

177–190) Die folgenden Aufgaben sollen mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip bearbeitet werden!

177) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 7 Englisch, 5 Französisch, 6 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

178) In einer Menge von n Personen können 13 Personen Deutsch, 8 Englisch, 7 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 6 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 2 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

179) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Französisch, 4 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

180) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

181) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^8$ gibt es, die weder dritte, noch vierte, fünfte oder sechste Potenz einer natürlichen Zahl sind?

182) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^3$ gibt es, die durch 3 und 5, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

183) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 9 und 11, aber weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

184) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 3, 5 und 7, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

185) Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 3, 5 oder durch 13 teilbar sind? Wie viele sind weder durch 3, noch durch 5, noch durch 13 teilbar sind?

186) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?

187) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, in denen weder der Block „`abcd`“ noch der Block „`fa`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

188) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, in denen weder der Block „`bcf`“ noch der Block „`eb`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

189) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, `h`, in denen weder der Block „`acg`“ noch der Block „`cgbe`“ vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

190) Auf wieviele Arten können 8 Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart daß sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt? (Ein Turm schlägt eine andere Figur, die horizontal oder vertikal auf gleicher Höhe steht, sofern keine andere Figur dazwischen steht.)

191) Stellen Sie sich ein rechteckiges Schachbrettmuster vor, bestehend aus m mal n Quadraten mit Seitenlänge 1. Wege seien nur entlang der Ränder dieser Quadrate erlaubt. Die kürzesten Wege vom linken unteren zum rechten oberen Eckpunkt des Rechtecks haben offenbar alle die Länge $m + n$. Die Menge all dieser kürzesten Wege sei mit $K(m, n)$ bezeichnet.

(a) Wieviele kürzeste Wege gibt es für $m = 6$ und $n = 4$?

(b) Jeder kürzeste Weg w lässt sich darstellen als eine Abfolge von Schritten w_i nach oben (o) oder nach rechts (r), symbolisch also $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{m+n})$, z.B. $w = (r, o, r, r, o, o, o, r, r, r)$ (hier ist wieder $m = 6, n = 4$). Beschreiben Sie eine Bijektion f zwischen $K(m, n)$ und der Menge $T(m, n)$ aller m-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, m + n\}$.

(c) Geben Sie eine allgemeine Formel für $|K(m, n)|$ an.

192) Bezeichne N die Menge $\{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, und S_n die Menge aller Bijektionen $f : N \to N$.

(a) Sei A die Anzahl aller n-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{1, \ldots, n\} = N$, B die Anzahl der Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $a_i \in N$, C die der Elemente von S_n. Ordnen Sie die Zahlen A, B, C der Größe nach.

(b) Geben Sie Formeln für A, B und C aus (a).

(c) Wieviele $f \in S_n$ gibt es, die $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \leq n)$ invariant lassen, d.h. die $f(i) \leq m$ für alle $i \leq m$ erfüllen.

193–195) Man bestimme $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$:

193) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 5\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 3\}$.

194) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 2\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$.

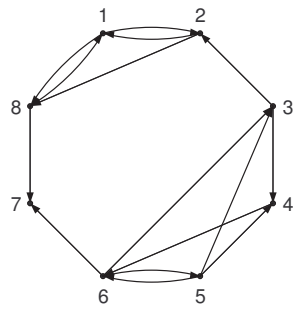
195) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y \text{ oder } x = y + 1\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid xy < 25,\ x < y\}$.

196)

(a) In nachstehendem Graphen gebe man (verschiedene) Beispiele für eine gerichtete Kantenfolge, einen Kantenzug und eine Bahn vom Knoten 6 zum Knoten 1 an.

(b) Desgleichen finde man eine geschlossene Kantenfolge, einen geschlossenen Kantenzug sowie einen Zyklus jeweils durch den Knoten 5.

(c) Man zeige, daß G schwach, aber nicht stark zusammenhängend ist, und bestimme die starken Zusammenhangskomponenten.



197–207) Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den folgenden Beispielen Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 18.

197) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodaß der von den Knoten a, b, c, d in G_1 aufgespannte Teilgraph mit G_2 identisch ist.

198) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodaß der von den Knoten a, b, c, d in G_3 aufgespannte Teilgraph mit G_4 identisch ist.

199) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_1 (als Relation aufgefaßt) umfaßt.

200) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_3 (als Relation aufgefaßt) umfaßt.

201) Konstruieren Sie, wenn möglich einen ungerichteten Graphen mit den Graden

(a) 2, 2, 3, 3, 4, 4

(b) 2, 3, 3, 4, 4, 4

(c) 2, 3, 3, 3, 4, 4

202) Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 6$ an!

(b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $\alpha_0(G)$?

(c) Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 2n$ gibt!

203) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_1.

204) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_3.

205) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_5.

206) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_7.

207) Sei $\bar{G}_7$ jener Graph, der aus G_7 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion $\bar{G}_{7R}$ des Graphen $\bar{G}_7$.

208) Bezeichne $G = (V, E)$ einen gerichteten Graphen, V die Knoten-, $E \subseteq V^2$ die Kantenmenge. Definitionsgemäß heißen zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit: $(x, y) \in E_1$ (d.h. die Knoten x und y sind in G_1 durch eine Kante verbunden) genau dann, wenn $(f(x), f(y)) \in E_2$ (d.h. wenn auch $f(x)$ und $f(y)$ in G_2 durch eine Kante verbunden sind).

1. Skizzieren Sie zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $|V_i| = 6$ $(i = 1, 2)$, die nicht isomorph sind.
2. Begründen Sie, warum die von Ihnen gewählten Beispiele tatsächlich nicht isomorph im Sinne obiger Definition sind.
3. Wieviele Kanten muss ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit sechs Knoten mindestens haben, wieviele ein zusammenhängender ungerichteter Graph?

209) Gegeben sei der ungerichtete schlichte Graph $G = \langle V, E\rangle$ mit $V = \{a, b, c, d, e\}$ und $E = \{ab, ac, ae, bc, bd, ce\}$. Man veranschauliche G graphisch, bestimme seine Adjazenzmatrix sowie alle Knotengrade und zeige, daß die Anzahl der Knoten, die einen ungeraden Knotengrad besitzen, gerade ist. Gilt diese Aussage in jedem ungerichteten Graphen?

210) Welche der nachstehenden Adjazenzmatrizen stellt einen Baum dar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

211–221) Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den folgenden Beispielen Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 18.

211) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_1} und die Potenz $A^2_{G_1}$.

212) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_3} und die Potenz $A^2_{G_3}$.

213) Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(G_5)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 4 nach 6.

214) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(\bar{G}_5)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 4 nach 6.

215) Man bestimme im Graphen G_5 die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

216) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme im Graphen $\bar{G}_5$ die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

217) Man bestimme im Graphen G_9 mit Hilfe von $A^3_{G_9}$ die Anzahl der Dreiecke (d. h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).

218) Man bestimme im Graphen G_{10} mit Hilfe von $A^3_{G_{10}}$ die Anzahl der Dreiecke (d. h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).

219) Man bestimme im Graphen G_6 mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(G_6)$ die Matrix R der Erreichbarkeitsrelation.

220) Sei $\bar{G}_6$ jener Graph, der aus G_6 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme im Graphen $\bar{G}_6$ mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(\bar{G}_6)$ die Matrix R der Erreichbarkeitsrelation.

221) Man untersuche, ob der Graph G_{14} eine Eulersche Linie besitzt, und bestimme gegebenenfalls eine.

222) Man zeige, daß es in einem schlichten, gerichteten Graphen $G = \langle V, E\rangle$ immer zwei Knoten $x, y \in V$, $x \neq y$, gibt mit gleichem Weggrad $d^+(x) = d^+(y)$, wenn es keinen Knoten $x \in V(G)$ mit Weggrad $d^+(x) = 0$ gibt.

223) Man zeige mit Hilfe eines graphentheoretischen Modells, daß es unmöglich ist, daß bei 5 Personen, die jeweils drei anderen eine Karte senden, alle genau von jenen Karten erhalten, denen auch sie eine geschickt haben.

224) Sei G ein einfacher Graph. Man zeige, daß dann die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade ist.

225) Man zeige, daß es in jedem einfachen Graphen G mit $n \geq 2$ Knoten wenigstens zwei Knoten mit gleichem Knotengrad gibt.

226) Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insgesamt schon $n + 1$ Spiele stattgefunden. Man zeige, daß mindestens eine Mannschaft dann bereits an mindestens 3 Spielen teilgenommen hat.

227) Man zeige, daß es in einem Graphen G mit $0 < \alpha_1(G) < \alpha_0(G)$ immer einen Knoten $v \in V(G)$ mit $d(v) \leq 1$ gibt.

228) Man zeige mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells, daß es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

229) Man bestimme alle Bäume T, für die auch T^κ ein Baum ist. T^κ bezeichne den komplementären Graphen definiert durch: $V(T^\kappa) = V(T)$ und $E(T^\kappa) = (V \times V) \setminus (E(T) \cup \{(x, x) | x \in V\})$.

230) Sei G ein schlichter Graph mit $\alpha_0(G) > 4$. Man zeige, daß dann entweder G oder G^κ (der komplementäre Graph, siehe Aufgabe 229) einen Kreis enthält. (G^κ ist der komplementäre Graph zu G, d.h. G^κ enthält dieselben Knoten wie G und alle Kanten $(v, w) \in V(G) \times V(G)$, $v \neq w$, die nicht in $E(G)$ enthalten sind.)

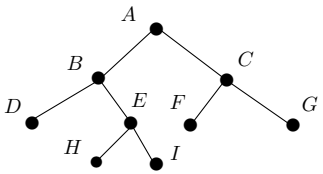
231) Für welche m, n besitzt der vollständige paare Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? (Die Knotenmenge V eines vollständigen paaren Graphen $K_{m,n}$ besteht aus 2 disjunkten Teilmengen V_1, V_2 mit $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$ und die Kantenmenge E besteht aus allen ungerichteten Kanten (v_1, v_2) mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.)

232) Gegeben seien die 6 Daten $A, \ldots, F$ durch die Schlüsselfolgen $A = 010010\ldots$, $B = 011101\ldots, C = 101100\ldots, D = 101011\ldots, E = 100110\ldots, F = 001010\ldots$. Konstruieren Sie den zugehörigen Trie, Patricia Trie und Digitalen Suchbaum.

233) Die *externe Pfadlänge* eines Tries (das ist ist ein Binärbaum, bei dem die Daten in den Blättern gespeichert werden) ist die Summe der Abstände von der Wurzel zu allen *besetzten* Endknoten des Baumes, wobei die Abstände in der Anzahl der Kanten auf dem entsprechenden Weg gemessen werden. Wie groß ist die externe Pfadlänge eines Tries, der N Daten enthält, mindestens? (Hinweis: Welche Gestalt des Binärbaums führt zu kleiner Pfadlänge ?)

234) Ein t-ärer Baum ($t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$) ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten entweder 0 Nachfolger (Endknoten) oder genau t Nachfolger (interner Knoten) hat. Für $t = 2$ ergeben sich also genau die Binärbäume. Wieviele Endknoten hat ein t-ärer Baum mit n internen Knoten?

235) Zum *Abarbeiten* der Knoten eines Binärbaumes verwendet man gerne rekursive Algorithmen, die in wohldefinierter Reihenfolge die folgenden Schritte ausführen:
(1) Bearbeite den aktuellen Knoten,
(2) Gehe zur Wurzel des linken Nachfolgebaums des aktuellen Knotens,
(3) Gehe zur Wurzel des rechten Nachfolgebaums des aktuellen Knotens.



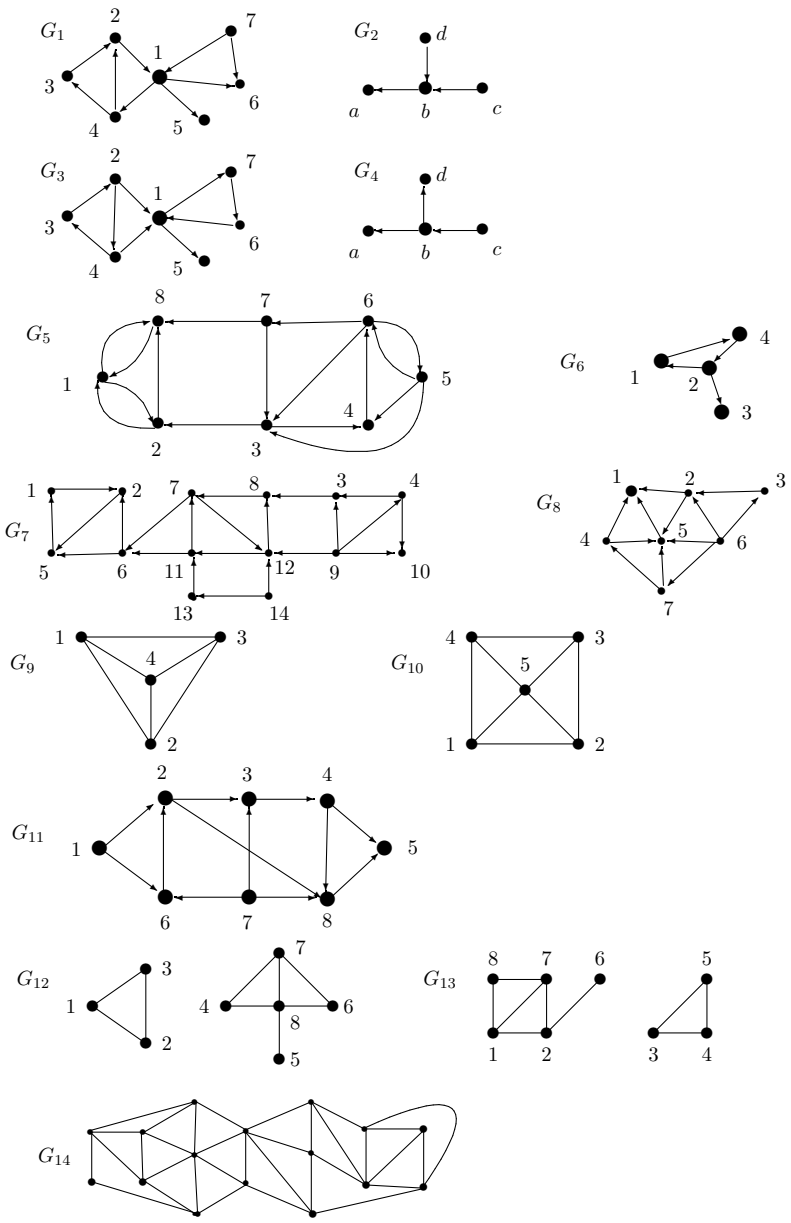
Am Beginn steht man bei der Wurzel des Gesamtbaumes. Führt man die genannten Schritte (1) bis (3) rekursiv in der angegebenen Reihenfolge aus, so spricht man von *Präordertraversierung*. Beim untenstehenden Baum werden die Knoten also in folgender Reihenfolge bearbeitet: $A, B, D, E, H, I, C, F, G$. Wie ändert sich diese Reihenfolge, wenn man im Algorithmus jeweils die Abfolge (2)(1)(3) nimmt (*Inordertraversierung*), wie wenn man die Abfolge (2)(3)(1) wählt (*Postordertraversierung*)?

236) Gegeben sei ein zusammenhängender bewerteter Graph G durch seine Kanten / Bewertungen:

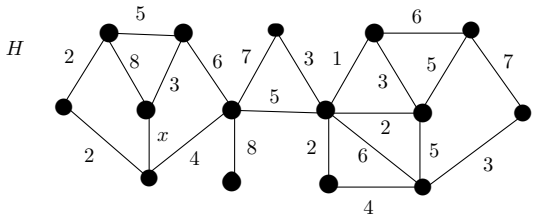
ab/3, ac/2, ad/7, ae/2, bd/4, bf/8, bk/6, bl/1, cf/2, ck/5, de/1,
df/6, dg/9, dh/6, dj/1, ef/2, ei/1, fg/2, gh/4, fk/6, gi/6, hk/7.

(a) Man gebe drei verschiedene Gerüste von G an.

(b) Man bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal ein Minimalgerüst von G und dessen Gesamtlänge.



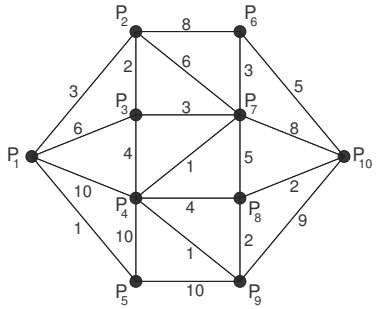
237–240) Man bestimme im folgenden Graphen H für den angegebenen Wert von x mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.



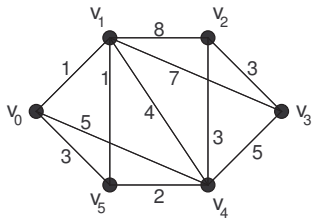
237) $x = 2$ **238)** $x = 3$

239) $x = 4$ **240)** $x = 5$

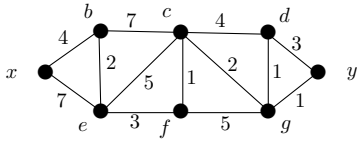
241) In der folgenden schematisch skizzierten Landkarte sind für eine bestimmte Fracht die Transportkosten zwischen einzelnen Orten angegeben. Welches ist der billigste Weg vom Ort P_1 zum Ort P_{10}?



242) Im nachstehenden bewerteten Graphen bestimme man den Entfernungsbaum bezüglich des Knotens v_0.



243) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra einen kürzesten Weg zwischen den Knoten x und y im folgenden Graphen:



244) Gegeben seien die folgenden zweistelligen partiellen Operationen $\bullet$ in der Menge M. Man untersuche, in welchem Fall eine Operation in M vorliegt. Welche der Operationen sind assoziativ, welche kommutativ?

(a) $M = \{-1, 0, 1\}$, $\bullet$ gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation

(b) $M = \mathbb{N}$, $a \bullet b = 2^{ab}$

(c) $M = \mathbb{Q}$, $a \bullet b = ab + 1$

(d) $M = \mathbb{R}$, $a \bullet b = |a + b|$

(e) $M \neq \emptyset$, $a \bullet b = a$

245) Man zeige, daß $\langle \mathbb{Z}, \bullet \rangle$ mit der Operation

$$a \bullet b = a + b - ab, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Wenn ja, welche Elemente haben Inverse?

246) Sind X und Y Mengen von Wörtern über einem Alphabet, dann bezeichne $XY = \{w_1 w_2 | w_1 \in X, w_2 \in Y\}$. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b, c\}$ bestimme man

$$A^*, \ B^*, \ A^*B, \ AB^*, \ (A \cup B)^* \ \text{ und } \ ABA^*B.$$

247–265) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

247) $M = \{0, 1, 2\}$, $m \circ n = \min(m + n, 2)$ **248)** $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $m \circ n = \min(mn, 3)$

249) $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $m \circ n = mn$ **250)** $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = \frac{z_1 z_2}{2}$

251) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$ **252)** $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

253) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ oder } |z| = \frac{1}{2}\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

254) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cup C$.

255) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cap C$.

256) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \triangle C$ (die symmetrische Differenz).

257) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \setminus C$ (die Mengendifferenz).

258) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = a - b$. **259)** $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$, $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$.

260) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = ab + 1$. **261)** $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, $a \circ b = a + b - ab$.

262) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \circ b = a/b$.

263) $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a \circ b = a + b + ab$.

264) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \max\{a, b\}$.

265) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \min\{a, b\}$.

266–267) Man ergänze die folgende Operationstafel so, daß $\langle G = \{a, b, c\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

266)

$*$	a	b	c
a	a		
b			
c			

267)

$*$	a	b	c
a	b		
b			
c			

268–269) Man ergänze die folgende Operationstafel so, daß $\langle G = \{a, b, c, d\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

268)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				

269)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		c		
c				
d				

270–271) Man ergänze die folgende Operationstafel so, daß $\langle G = \{a, b, c, d\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

270)

$*$	a	b	c	d
a	b			
b		b		
c			b	
d				

271)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c				
d				a

272) Man zeige: Gilt für ein Element a einer Gruppe G: $a * a = a$, dann ist a das neutrale Element von G.

273) Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G (mit neutralem Element e) ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$\text{(i) } a, b \in U \;\Rightarrow\; ab \in U, \qquad \text{(ii) } e \in U, \qquad \text{(iii) } a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$$

für alle $a, b \in G$ erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a, b \in U \;\Rightarrow\; ab^{-1} \in U$.

274) Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer endlichen Gruppe G ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$a, b \in U \;\Rightarrow\; ab \in U$$

für alle $a, b \in G$ gilt.

275) Beweisen Sie, daß in einer Gruppe $(G, \cdot)$ die folgenden Rechenregeln für alle $a, b, c \in G$ gelten:

(a) $a \cdot b = a \cdot c \;\Rightarrow\; b = c$

(b) $(a^{-1})^{-1} = a$

(c) $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(d) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist in G immer eindeutig lösbar.

276) Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe S_3 aller Permutationen von drei Elementen mit der Operation der Hintereinanderausführung.

277) Man bestimme alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6, d. h., von $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.

278) Man zeige: Der Durchschnitt zweier Untergruppen ist wieder eine Untergruppe.
Gilt dies auch für die Vereinigung zweier Untergruppen?

279) Sei G die Menge der Permutationen

$$\{(1), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}.$$

Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, daß G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates), und bestimme alle Untergruppen.

280) In der Symmetriegruppe des Quadrates aus Aufgabe 279) bestimme man die Rechts- bzw. Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

281) Sei U die von $(1)(23)$ erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Rechtsnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

282) Sei U die von $(2)(13)$ erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

283) Sei U die von (123) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Weiters stelle man fest, ob U Normalteiler von S_3 ist und bestimme gegebenenfalls die Gruppentafel der Faktorgruppe S_3/U.

284) Es sei U eine Untergruppe der Gruppe G. Man zeige, dass die Relation $a \sim b \iff a \circ U = b \circ U$ eine Äquivalenzrelation auf G ist und dass die Äquivalenzklassen von $\sim$ die Linksnebenklassen von U in G sind.

285) Man zeige, daß die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_9, +\rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_9, +\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_9/U$.

286) Man zeige, daß die von $\bar{4}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

287) Man zeige, daß die von $\bar{5}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{15}, +\rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{15}, +\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{15}/U$.

288) Man zeige, daß die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

289) Man zeige: Das Zentrum $Z(G) = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x \text{ für alle } y \in G\}$ einer Gruppe $\langle G, \cdot\rangle$ ist Normalteiler von G.

290–291) Definition: Der Kommutator $K(G)$ einer Gruppe G ist jene Untergruppe von G, die von allen Elementen $xyx^{-1}y^{-1}$ $(x, y \in G)$ erzeugt wird.

290) Man zeige: $K(G)$ ist ein Normalteiler von G.
(Hinweis: Man beweise zunächst $axyx^{-1}y^{-1}a^{-1} = \big((ax)y(ax)^{-1}y^{-1}\big)\big(yay^{-1}a^{-1}\big)$.)

291) Man zeige: Die Faktorgruppe $G/K(G)$ ist kommutativ. (Hinweis: $ab = baa^{-1}b^{-1}ab$.)

292) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Man zeige, daß dann $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

293) Sei $\varphi : G \to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Man zeige, daß dann auch $\varphi^{-1} : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

294) Seien $\varphi : G \to H$ und $\psi : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Man zeige: $\psi \circ \varphi : G \to K$ ist auch ein Gruppenhomomorphismus.

295) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e das neutrale Element von G. Man zeige, daß $\varphi(e)$ das neutrale Element von H ist. (Hinweis: Man verwende Bsp. 272.)

296) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und N ein Normalteiler von H. Man zeige, daß dann $U = \varphi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G ist.

297) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 5 mit der Multiplikation.

298) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der Restklassen modulo 4 mit der Addition.

299) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$.

300) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{13}, + \rangle$.

301) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{18}, + \rangle$.

302) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{19}, + \rangle$.

303) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Untersuchen Sie, ob $(G \times G, \circ)$ mit $(a, b) \circ (c, d) = (a * c, b * d)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

304) Seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ zwei Gruppen. Untersuchen Sie, ob $(G \times H, \circ)$ mit $(a, b) \circ (c, d) = (a * c, b \cdot d)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

305) Auf $\mathbb{Z}_2^2$ sei eine Addition $+_2$ komponentenweise definiert, d.h., $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) +_2 (\bar{b}_1, \bar{b}_2) = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2)$. Beweisen Sie, daß $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$ eine Gruppe ist und geben Sie auch die Operationstafel von $+_2$ an.

306) Von der Abbildung $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ sei bekannt, daß f ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition ist (die jeweils komponentenweise definiert sein soll), sowie daß $f(0, 1) = (0, 1, 1, 2)$, $f(1, 0) = (1, 0, 2, 0)$. Man ermittle daraus $f(w)$ für alle $w \in (\mathbb{Z}_3)^2$.

307) Wie Bsp. 306) für $f(1, 0) = (0, 1, 2, 1)$, $f(0, 1) = (1, 0, 0, 2)$.

308) Wie Bsp. 306) für $f(1, 0) = (1, 0, 0, 2)$, $f(1, 1) = (1, 2, 0, 1)$.

309) Wie Bsp. 306) für $f(2, 0) = (0, 1, 2, 2)$, $f(1, 2) = (2, 2, 1, 0)$.

310) Man bestimme die „primen“ Restklassen modulo 9, d. h. alle Restklassen $\bar{a}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 9) = 1$. Man zeige, daß die Menge Γ_9 dieser primen Restklassen bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Gruppe bildet.

311) Wie Bsp. 310) für die primen Restklassen modulo 16.

312) Wie Bsp. 310) für die primen Restklassen modulo 18.

313) Sei $\langle \Gamma_9, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 310). Man bestimme die vom Element $\bar{8}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_9.

314) Sei $\langle \Gamma_{16}, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 311). Man bestimme die vom Element $\bar{9}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{16}.

315) Sei $\langle \Gamma_{18}, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 312). Man bestimme die vom Element $\bar{7}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{18}.

316) Sei G eine Gruppe, deren Ordnung $|G|$ eine Primzahl ist. Man zeige, daß G nur die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G hat.

317–324) Untersuchen Sie, ob die folgenden Strukturen Ringe, Integritätsringe bzw. Körper sind:

317) $M = \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2 und dem Produkt $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in M$.

318) $M = \{0, 1, 2\}$ mit der Addition modulo 3 und dem Produkt $a \cdot b = 1$ für alle $a, b \in M$.

319) $M = \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$.

320) Wie 319), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$.

321) Wie 319), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.

322) Wie 319), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{14}]$.

323) $M = \{0, 1, 2\}$ mit der Addition modulo 3 und der Multiplikation modulo 4.

324) $M = \{0, 1\}$ mit der Addition $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$, und der Multiplikation modulo 2.

325) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 + 3i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

326) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 - i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

327) Gibt es eine Menge K mit $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$, die mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation einen Körper bildet? (Begründung!)

328) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement und $E(R)$ die Menge derjenigen Elemente in R, die bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzen. Zeigen Sie, daß $E(R)$ mit der Multiplikation eine Gruppe bildet (die *Einheitengruppe* von R).

329) Man zeige, daß für eine beliebige Menge M die Algebra $\langle (\mathbf{P}(M), \Delta, \cap \rangle$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Für welche M ist dieser Ring sogar ein Körper?

330) Bestimmen Sie die Einheitengruppe (vgl. 328) des Restklassenringes $\mathbb{Z}_9$.

331) Man bestimme $\mathbb{Z}_6^*$ und $\mathbb{Z}_3^*$ und überprüfe, ob diese beiden Gruppen isomorph sind.

332–334) Beweisen Sie, daß die angegebene Identität in einem Ring R für alle $a, b \in R$ gilt ($-c$ bezeichnet das additive Inverse zu c):

332) $(-a)b = -(ab)$

333) $a(-b) = -(ab)$

334) $(-a)(-b) = ab$

335) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring. Man zeige, daß dann auch $R \times R$ mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

ein Ring ist.

336) Seien $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ und $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ Ringe. Man zeige, daß dann auch $R_1 \times R_2$ mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a +_1 c, b +_2 d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot_1 c, b \cdot_2 d)$$

ein Ring ist.

337) Sei R ein Ring und $R[[z]]$ die formalen Potenzreihen $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in R$. Man zeige, daß $R[[z]]$ mit den Operationen

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n, \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

ein Ring ist. Man zeige weiters, daß $R[[z]]$ ein Integritätsring ist, wenn R ein Integritätsring ist.

338) Man ermittle, ob beim Übergang von R zu $R \times R$ (Bsp. 335)) die folgenden Eigenschaften erhalten bleiben:
a) Kommutativität, b) Nullteilerfreiheit, c) Existenz eines Einselementes.

339) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt. Man zeige, daß dann auch $a + a = 0$ für alle $a \in R$ gilt. (Hinweis: Man betrachte $(a + a)^2$.)

340) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt. Man zeige, daß dann R kommutativ ist. (Hinweis: Man betrachte $(a + b)^2$ und $(ab + ab)^2$.)

341) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{4}x^2 + \bar{7}x + \bar{7} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_{11}$.

342) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{6} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

343) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{2}x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_{13}$.

344–348) Ein Polynom heißt irreduzibel, wenn es nicht als Produkt zweier Polynome kleineren Grades darstellbar ist.

344) Man untersuche das Polynom $x^2 + x + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$, b) über $\mathbb{Z}_3$.

345) Man untersuche das Polynom $x^2 + x + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{R}$, b) über $\mathbb{Z}_5$.

346) Man untersuche das Polynom $x^2 + 3$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$, b) über $\mathbb{Z}_5$.

347) Man untersuche das Polynom $x^3 + x^2 + 5$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$ und b) über $\mathbb{Z}_7$.

348) Man untersuche das Polynom $x^3 - x^2 + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$ und b) über $\mathbb{Z}_5$.

349–350) Man zeige, dass die folgenden algebraischen Strukturen Verbände sind. Welche sind außerdem distributiv, und welche sind Boole'sche Algebren?

349) a) $(\mathbb{R}, \min, \max)$, b) $(\mathbb{N}, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$.

350) a) $(\mathbf{P}(A), \cap, \cup)$, b) $(\{U \mid U \leq G\}, \cap, \langle \cdot \cup \cdot \rangle)$, G Gruppe.

351) Sei $(M, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Beweisen Sie:

a) $\forall a \in M: \ a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0.$

b) Falls $a \vee b = 1$ und $a \wedge b = 0$, so folgt $b = a'$

352) Sei M die Menge aller Teiler von 60. Bestimmen Sie alle Komplemente in $(M, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$. Ist diese Struktur eine Boolesche Algebra?

353) Sei $(M, \wedge, \vee)$ ein Verband mit 5 Elementen. Zeigen Sie, daß $(M, \wedge, \vee)$ keine Boolesche Algebra ist.
Hinweis: Betrachten Sie alle möglichen Hassediagramme der durch den Verband bestimmten Halbordnung.

354) Sei $(M, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Beweisen Sie:

a) $(a')' = a$

b) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ und $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

355–360) Bildet $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$?

355) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

356) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (0, \lambda x_2)$.

357) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_2 + y_1, x_1 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

358) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

359) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$.

360) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$.

361–371) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist und beschreiben Sie die Menge W geometrisch:

361) $W = \{(x, y, z) \mid x = 2y\}$

362) $W = \{(x, y, z) \mid y = -z\}$

363) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$

364) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

365) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 0\}$

366) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \geq 0\}$

367) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$

368) $W = \{(x, y, z) \mid x = 2z\}$

369) $W = \{(x, y, z) \mid x = -z\}$

370) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

371) $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

372–373) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums V über K ist.

372) Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *ungeraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = -f(-x)$.

373) Sei V Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *geraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = f(-x)$.

374) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (vgl. Aufgabe 319)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

375) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (vgl. Aufgabe 319)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

376) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ bildet mit den in $\mathbb{C}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

377) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V über dem Körper K gilt $\lambda \cdot o = o$ für alle $\lambda \in K$ und $0 \cdot a = o$ für alle $a \in V$.

378–380) Zeigen Sie, daß in jedem Vektorraum V über dem Körper K für alle $a \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

378) $(-\lambda)a = -(\lambda a)$

379) $\lambda(-a) = -(\lambda a)$

380) $(-\lambda)(-a) = \lambda a$

381) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ vom Grad kleiner gleich 4 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{Q}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

382) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 381) der die Polynome x und x^3 enthält.

383) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 381) der die Polynome $x-x^2$ und $x+x^3$ enthält.

384) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 381) der die Polynome $2x^2+x-1$, $3x^2-x+2$ und $5x^2-5x+8$ enthält.

385) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 381) der die Polynome $1+x-x^2$, $-1+5x-4x^2$ und $4-2x+x^2$ enthält.

386) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{R}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis dieses Vektorraums, die nur Polynome dritten Grades enthält.

387) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 386) der die Polynome x und x^2 enthält.

388) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 386) der die Polynome $2x^2-x^3$, $3x^2-x-1$ und x^2+3x^3 enthält.

389) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 386) der die Polynome $2x^2-x^3$, $2x^2-5x+2$ und x^2+3x^3 enthält.

390) Zeigen Sie, daß $B=\{(1,2,4),(2,4,1),(4,2,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

391) Untersuchen Sie, ob $B=\{(-1,4,-4),(2,-4,7),(3,2,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

392) Untersuchen Sie, ob $B=\{(0,7,4),(-2,4,-5),(6,2,-1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

393) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn x_1+x_2,x_2+x_3,x_3 linear unabhängig sind.

394) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $x_1+x_2+x_3,x_2+x_3,x_3$ linear unabhängig sind.

395) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn x_1-x_2,x_2,x_2-x_3 linear unabhängig sind.

396) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,5)$, $(3,4,5,6)$.

397) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_7^4$ linear unabhängig sind: $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,5)$, $(3,4,5,6)$.

398) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_{11}^4$ linear unabhängig sind: $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,5)$, $(3,4,5,6)$.

399) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(4,3,2,1)$, $(2,3,4,5)$, $(3,4,-5,1)$.

400) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(-1,3,2,-1)$, $(2,2,-1,1)$, $(3,-1,-2,2)$.

401) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(-3,3,0,-2)$, $(0,7,-1,3)$, $(-3,1,0,-4)$.

402) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_5^4$ linear unabhängig sind: $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,1)$, $(3,4,2,1)$.

403) Sei $V=\left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i \mid a_i\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{N}\right\}$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Untersuchen Sie, ob daß $1+x+x^3$, $3-x+x^2$ und $-5+x+x^2-x^3$ linear unabhängig sind.

404) Wie 403, nur für $1-x+x^3$, $3-x^2+x^3$ und $-5+3x+x^2-4x^3$.

405) Wie 403, nur für $1-x-3x^2$, $2-2x^2$ und $3+3x-2x^2$.

406) Sei $V=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen. Untersuchen Sie, ob f und g mit $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$ linear unabhängig sind.

407) Wie 406, nur für $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\sin(2x)$.

408) Wie 406, nur für $f(x)=\cos(x)$ und $g(x)=\cos(2x)$.

409) Wie 406, nur für $f(x)=\cos(x)$ und $g(x)=e^x$.

410) Wie 406, nur für f,g,h mit $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=e^x$ und $h(x)=xe^x$.

411) Wie 406, nur für f,g,h mit $f(x)=e^x$, $g(x)=xe^x$ und $h(x)=x^2e^x$.

412) Wie 406, nur für f,g,h mit $f(x)=1$, $g(x)=e^x$ und $h(x)=e^{3x}$.

413) Sei

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die Matrizen I_2, A und A^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

414) Sei

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die Matrizen I_2, A und A^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

415) Sei

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \text{ und } B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die Matrizen A, B und B^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

416) Beweisen Sie, daß jede quadratische Matrix A als Summe einer symmetrischen Matrix B (d.h., $B=B^T$) und einer schiefsymmetrischen Matrix C (d.h., $C=-C^T$) geschrieben werden kann. (Hinweis: Wählen Sie $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$.) Wie sieht diese Zerlegung konkret für die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

aus?

417–419) Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung A von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

417) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$

418) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$

419) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$

420) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 + z_2 = z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = -z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

421) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 - z_2 = z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

422) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_1 = 2z_2 = 3z_3\}$, $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V \mid z_2 = 0\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

423) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

424) Bestimmen Sie zu Beispiel 423) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie $\operatorname{Rang} A$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

425) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 423) und 424) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

426) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

427) Bestimmen Sie zu Beispiel 426) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie $\operatorname{Rang} A$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

428) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 426) und 427) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

429) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

430) Bestimmen Sie zu Beispiel 429) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie $\operatorname{Rang} A$ und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{Rang} A = \dim \mathbb{R}^2$.

431) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 429) und 430) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

432) Ein Produzent verarbeite die Rohstoffe R_1, R_2, R_3. Der Verbrauch der Rohstoffe während vier Wochen eines Monats sei wie folgt gegeben:

Woche / Rohstoff	R_1	R_2	R_3
1. Woche	8	4	12
2. Woche	10	6	5
3. Woche	7	8	5
4. Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen bei einem von zwei Lieferanten L_1, L_2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in nachstehender Tabelle angegeben sind:

Rohstoff / Lieferant	L_1	L_2
R_1	8	4
R_2	10	6
R_3	7	8

Man beschreibe die Rohstoffkosten mit Hilfe von geeigneten linearen Abbildungen und vergleiche sie für alle vier Wochen. Soll der Produzent beim Lieferanten L_1 oder L_2 bestellen?

433) Drei Produkte P_1, P_2, P_3 werden aus Rohstoffen R_1 und R_2 hergestellt. Die Herstellungskosten setzen sich aus den Rohstoffpreisen und den Arbeitskosten zusammen. Die benötigten Resourcen sind in der folgenden Tabelle gegeben.

Rohstoff/Produkt	P_1	P_2	P_3
R1	1	2	3
R2	2	3	1
Arbeit	7	8	3

Wie hoch sind die Kosten für R_1, R_2 und Arbeit, wenn die Herstellungskosten der Produkte P_1, P_2 bzw. P_3 EUR 27,– , EUR 17,– bzw. EUR 21,– betragen? Beschreiben Sie diesen Zusammenhang mit Hilfe geeigneter linearer Abbildungen.

434) Sei G die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$. Man zeige, daß $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

435) Sei U die Menge aller $n \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B = \pm 1$. Man zeige, daß U Normalteiler von G (aus Bsp. 434) ist.

436) Sei G die Menge aller $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A > 0$. Man zeige, daß $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

437) Sei U die Menge aller $n \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B = 1$. Man zeige, daß U Normalteiler von G (aus Bsp. 436) ist.

438) Sei G die Menge aller $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Man zeige, daß $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

439) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung D definiert durch

$$D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Untersuchen Sie, ob D eine lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie D weiters auf Injektivität und Surjektivität.

440) Wie 439) für die Abbildung $E(p(x)) = p(x+1)$.

441) Wie 439) für die Abbildung $F(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

442) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung D aus Aufgabe 439) bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

443) Wie 442) für die Abbildung $E(p(x)) = p(x+1)$.

444) Wie 442) für die Abbildung $F(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

445) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in x mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung I definiert durch

$$I(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Untersuchen Sie, ob I eine lineare Abbildung ist. Ist diese Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

446) Wie 445) für die Abbildung $S(p(x)) = p(x-1)$.

447) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung A definiert durch

$$A(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Zeigen sie, daß A linear ist und bestimmen Sie die Matrix von A bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

448–457) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösung des Gleichungssystems über dem Körper K:

448) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

449) Wie 448), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

450) $K = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

451) Wie 450), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

452) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ 7x_1 \qquad + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

453) Wie 452), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

454) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ 4x_1 \qquad + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

455) Wie 454), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

456) $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 \qquad + x_3 &= 4 \\ - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

457) Wie 456), jedoch $K = \mathbb{Z}_{11}$.

458) Man untersuche die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems und berechne gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

459) Wir betrachten Systeme von drei Ebenengleichungen $f_i(x,y,z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$ mit Lösungsmengen $L_i \subseteq \mathbb{R}^3$, $i = 1,2,3$. Geben Sie jeweils eine Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten a_{ij} und b_i aus $\mathbb{R}$ so an, dass die L_i folgende Lage zueinander haben:

(a) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{(1,1,1)\}$.

(b) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$, und alle drei Schnitte $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$ und $L_2 \cap L_3$ sind eindimensional und parallel zur z-Achse.

460) Wie 459, aber mit

(a) $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3$ ist die z-Achse.

(b) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset \neq L_2 \cap L_3$.

461–470) Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellen Matrizen

461)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

462)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 & 7 \\ 5 & -4 & -6 & 7 & -8 \\ 3 & 2 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

463)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

464)

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & -4 & -6 \\ 6 & 3 & -4 & 5 & 7 \\ 7 & -4 & 5 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

465)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

466)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

467)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

468)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

469)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 5 & -6 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -6 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

470)

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & -4 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & -2 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

471) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 \\ 5 & 8 & 11 & \dots & 3n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n+2 & 3n+5 & \dots & 6n-4 \end{pmatrix}.$$

472) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & \dots & 4n-2 \\ 6 & 10 & 14 & \dots & 4n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-2 & 4n+2 & 4n+6 & \dots & 8n-6 \end{pmatrix}.$$

473) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

474) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

475) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

476) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

477) Berechnen Sie zur folgenden Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ die Matrix A^3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

478) Berechnen Sie zur folgenden Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ die Matrix A^3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

479) Für die Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man $C = AB$ und verifiziere den Determinantensatz $\det C = \det A \cdot \det B$.

480) Für die Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man $C = AB$ und verifiziere den Determinantensatz $\det C = \det A \cdot \det B$.

481) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

482) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

483) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 7 & 12 \end{vmatrix}.$$

484) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

485) Berechnen Sie die Determinante aus Beispiel 481 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

486) Berechnen Sie die Determinante aus Beispiel 482 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

487) Berechnen Sie die Determinante aus Beispiel 483 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

488) Berechnen Sie die Determinante aus Beispiel 484 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

489) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß A nichtsingulär ist und berechne A^{-1}. Schließlich ermittle man AA^{-1} sowie $A^{-1}A$.

490–493) Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist die Matrix A singulär? Bestimmen Sie für den angegebenen Wert von x die inverse Matrix A^{-1}.

490) $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{pmatrix}, \quad x = 1.$

491) $A = \begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = -1.$

492) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{pmatrix}, \quad x = 2.$

493) $A = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ 0 & 10 & 4x \\ 3x & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = -2$

494–495) Über welchem Körper $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) ist die Matrix A singulär? Wählen Sie ein p aus, für das die Matrix regulär ist und bestimmen Sie für dieses p die inverse Matrix A^{-1}.

494) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

495) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

496–503) Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

496) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

497) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

498) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

499) $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

500) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -4 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

501) $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -6 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

502) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

503) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

504) Gegeben sei die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(2,1) \mapsto (-2,4)$ und $(-3,0) \mapsto (0,-6)$.

(a) Geben Sie eine geometrische Interpretation von f.

(b) Wie lautet die Matrixdarstellung für f (bezüglich der kanonischen Basis)?

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $f(x,y) = (8,6)$

(d) Geben Sie sämtliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren von f an (anschauliche Begründung genügt).

505)

(a) Für welche $i \in \{1,2,3\}$ gibt es eine lineare Abbildung $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften?

- $f_1 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3)$
- $f_2 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (2,2,2)$
- $f_3 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (3,3,3)$

(b) Wählen Sie als f eine lineare Abbildung f_i aus (a). Geben Sie die f zugehörige Matrix A, die dazu transponierte Matrix A^T sowie jene Matrix B an, welche $g := f \circ f^T$ entspricht, wenn $f^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die A^T zugehörige lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie die Determinante von B aus Teil (b); wie ergibt sich daraus die Determinante von $2B$?

(d) Besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 0?

506) Für die Vektoren $\mathbf{x} = (1,2,3)$, $\mathbf{y} = (3,-1,2)$ und $\mathbf{z} = (2,2,1)$ berechne man

(a) die Längen von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$,

(b) den Winkel φ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$,

(c) das Volumen des von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ aufgespannten Parallelepipeds.

507) Wie 506 für die Vektoren $\mathbf{x} = (2,1,1)$, $\mathbf{y} = (3,-1,-2)$ und $\mathbf{z} = (1,2,1)$.

508) Wie 506 für die Vektoren $\mathbf{x} = (-1,1,0)$, $\mathbf{y} = (3,5,-7)$ und $\mathbf{z} = (6,6,1)$.

509) Im $\mathbb{R}^3$ sei ein verallgemeinertes Skalarprodukt gegeben durch die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -6 \\ -5 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für die Vektoren $\mathbf{x} = (1,2,3)$ und $\mathbf{y} = (3,-1,2)$

(a) die Längen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$,

(b) den Winkel φ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

510) Wie 509, nur mit

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 5 & 10 & -15 \\ -5 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

511) Wie 509, nur mit $\mathbf{x} = (-1,0,1)$ und $\mathbf{y} = (2,-1,2)$

512)

(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle a, b\rangle$ der beiden ebenen Vektoren $a = (3, 2)$ und $b = (1, 2)$ und geben Sie anhand einer Skizze eine geometrische Interpretation dieses Wertes als Fläche.

(b) Halten Sie den Vektor $a = (3, 2)$ aus (a) fest und bestimmen Sie jenen Vektor b der Länge 1, für den $\langle a, b\rangle$ maximal wird.

(c) Sei U der Raum aller Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

einen Rang ≤ 2 besitzt. Welche Dimension d hat U, sofern $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ linear unabhängig sind. (Begründung!)

(d) Geben Sie eine Basis B bestehend aus Vektoren $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}^3$ von U in (c) an, wenn $a = (1, 2, 3)$ und $b = (2, 3, 4)$.

513) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodaß die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

514) Aus der Basis $B = \{(2, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ des $\mathbb{R}^3$ soll mittels Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis gebildet werden (wobei das gewöhnliche innere Produkt zugrunde zu legen ist).

515) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle natürlichen Zahlen hat.

516) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle ganzen Zahlen hat.

517) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die als Häufungspunkte genau alle rationalen Zahlen hat?

518) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}$ $(n \geq 0)$.

519) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n(n+1)/2}$ $(n \geq 0)$.

520) Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{\sin n}{n}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

521) Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

522–523) Man zeige, daß die Folge a_n konvergiert, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

522) $a_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$

523) $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[4]{n}}$

524) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

525) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

526) Sei $\langle c_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, daß es zwei beschränkte Folgen $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

527) Sei $\langle c_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, daß es zwei Nullfolgen $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

528) Seien $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ und $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, daß die Folge $\langle c_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} = \langle a_n + 2b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = a + 2b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

529) Seien $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ und $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, daß die Folge $\langle c_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} = \langle 3a_n - b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = 3a - b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

530) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

531) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie, daß aus $a_n < b_n$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Läßt sich hier $\leq$ durch $<$ ersetzen?

532) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + (-1)^n(2 - \frac{1}{n^2})$.

1. Gelten für die Umgebung $U = U_1(3) = (2, 4)$ von 3 die folgenden beiden Aussagen?
   (a) $a_n \in U$ für unendlich viele n.
   (b) Es gibt ein $N = N(\varepsilon) = N(1)$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.
2. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ an.
3. Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ an, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist.
4. Warum konvergieren alle monotonen Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$?

533–535) Man untersuche die Folge a_n (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim a_n$.

533) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

534) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9}$ für alle $n \geq 0$.

535) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ für alle $n \geq 0$.

536) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4 \cdot \sqrt{a_n} - 3}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 - 4x + 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$.

537) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{a_n} - 3}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 - 2x + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 1)$.

538) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

539) $a_0 = 1/2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

540) Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und mögliche Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

(a) $(a_n) = 0, 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots, 2n + 1, \frac{1}{2n+2}, \ldots$

(b) (b_n) mit $b_n = \frac{n+4}{n-1}$ für $n \geq 2$

(c) (c_n) mit $c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ für $n \geq 1$

541) Sei $0 < a_0 < c$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_{n+1} = \sqrt{a_n c}$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $0 < a < c$ stets $a < \sqrt{ac} < c$ folgt.

(b) Folgern Sie aus (a) mittels Induktion nach n, dass $0 < a_n < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen die a_n irgendein Monotonieverhalten? Wenn ja, welches?

(d) Untersuchen Sie die a_n hinsichtlich Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

542) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = (a_n + 6/a_n)/2$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Man berechne die Folgenglieder a_n für $n = 0, \dots, 10$, untersuche die Folge in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

543) Seien P_1 und P_2 beliebige Punkte der Zahlengeraden. Man halbiere fortgesetzt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, die Strecke $\overline{P_2P_3}$ in P_4, $\overline{P_3P_4}$ in P_5, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n \to \infty$.

544–559) Man untersuche die Folge $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

544) $a_n = \dfrac{2n^3 + 2n - 3}{4n^3 + n^2 + 5}$

545) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n - 3}{2n^3 + 3n^2 - n + 7}$

546) $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 7}{3n^3 - 5n + 7}$

547) $a_n = \dfrac{2n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 7}$

548) $a_n = \dfrac{2n^2 - 5n^{\frac{9}{4}} + 7}{7n^3 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

549) $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2n^4 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

550) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

551) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

552) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

553) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$

554) $a_n = \dfrac{\frac{\sin n}{(n-2)^2} + \frac{n^2+2}{n^2-n}}{\frac{3n^2+2}{n^2+n}}$

555) $a_n = \dfrac{\frac{n^2-4}{4n^2-7n} - \frac{\cos n}{2n-5}}{\frac{3n^2+2}{(n-3)^2}}$

556) $a_n = n\,q^n \quad (-1 < q < 0)$

557) $a_n = \dfrac{q^n}{n} \quad (q > 1)$

558) $a_n = \sqrt[n^2]{n^5 + 1}$

559) $a_n = \sqrt[n^2]{n^3 + n^2}$

(Hinweis zu Bsp. 558) und Bsp. 559): Man verwende den als bekannt vorausgesetzten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

560–563) Man untersuche die Folge $\langle a_n\rangle_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $\langle b_n\rangle_{n\geq 1}$, $\langle c_n\rangle_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

560)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

561)

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

562)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

563)

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

564) Zeigen Sie: Sind $a_1, \dots, a_m \geq 0$ fest gewählte reelle Zahlen und ist $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_n = \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_m^n}$ definiert, so gilt $\lim b_n = \max\{a_1, \dots, a_m\}$.

565) Sei die Folge $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und bestimme den Grenzwert.

566) Sei die Folge $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

und bestimme den Grenzwert.

567) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

568–569) Man bestimme alle Häufungspunkte, sowie $\overline{\lim}\, a_n$ und $\underline{\lim}\, a_n$ der Folge a_n:

568)

$$a_n = (-1)^n n^{\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}+1\right)} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

569)

$$a_n = \frac{n^2 \cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

570–571) Man zeige, daß die Folge a_n uneigentlich konvergiert, indem man zu jedem $A > 0$ ein $N(A)$ angebe, sodaß für $n > N(A)$ immer $a_n > A$ gilt.

570)

$$a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$$

571)

$$a_n = \frac{2n^4+n}{n^3+n}$$

572) Man gebe zwei reelle Nullfolgen $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ an, die

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim \frac{a_n}{b_n^2} = +\infty$$

erfüllen.

573) Man gebe zwei reelle Folgen $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ an, die

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim \frac{a_n^2}{b_n} = +\infty \qquad \text{erfüllen.}$$

574–579) Man bestimme die Partialsummenfolge und ermittle dann gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe. (Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenz bzw. Summe passender Ausdrücke dar.)

574) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)}$

575) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

576) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

577) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$

578) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

579) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$

580) Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

und berechne damit – wenn möglich – die Summe.
(Anleitung: Man beachte, daß $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ gilt.)

581) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $c_n = \frac{1}{n}$ und $d_n = \frac{1}{n+1}$. Weiters sei $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und $D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

(a) Berechnen Sie die Partialsummen von B.

(b) Berechnen Sie den Wert von B.

(c) Begründen Sie $a_n \le 2b_n$. Konvergiert A?

(d) Warum ist $B = C - D$ falsch, obwohl $b_n = c_n - d_n$?

582–591) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

582) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{3n^2+1}{5n^3-2}$

583) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{n-2}{2n^3+5n-3}$

584) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{n+2}{6^n}$

585) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{n!}{n^n}$

Hinweis: Man benütze die aus der Bernoullischen Ungleichung folgende Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 2$.

586) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{2n^2+1}{n^4+2}$

587) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{n+3}{7n^2-2n+1}$

588) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{n-1}{3^n}$

589) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{n^{n-1}}{n!}$

590) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{(n^2+1)^n}{\sqrt{n}^{n^2}}$

591) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{3^{n^2}}{n^n}$

592–593) Man berechne unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe:

592) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

593) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

594–597) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

594) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$

595) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+5n}$

596) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$

597) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{(n+3)^{4/3}}$

598) Sei $a_n \ge 0$ und die Reihe $\sum_{n\ge 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\ge 0} a_n^2$ konvergiert.

599) Gilt Bsp. 598) auch ohne die Voraussetzung $a_n \ge 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

600) Sei $a_n \ge 0$ und die Reihe $\sum_{n\ge 0} a_n$ konvergent. Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n\ge 0} a_n^3$ konvergiert.

601) Gilt Bsp. 600) auch ohne die Voraussetzung $a_n \ge 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

602) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(a_{n+1} - a_n)$.

603) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(a_{n+2} - a_n)$.

604) Es sei $\lim a_n = 0$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(-1)^n(a_{n+1} + a_n)$.

605–608) Man zeige, daß die folgende Funktionenreihen im jeweils angegebenen Bereich konvergieren:

605) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad |x| < 1$

606) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4}$

607) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

608) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

609–610) Man untersuche, welche o-, O- und $\sim$-Beziehungen zwischen den Folgen a_n, b_n und c_n bestehen.

609) $a_n = 2n$, $b_n = \frac{n^2}{2}$, $c_n = \frac{3n^4}{6n^2+1}$.

610) $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{8n^2}{4n^3+1}$.

611–612) Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Anzahlen der Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

611) $\displaystyle\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

612) $\displaystyle\binom{n+k-1}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

613) Zeigen Sie die folgende asymptotische Beziehung für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

$$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^k + O(n^{k-1}).$$

614–615) Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

614)
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

615)
$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}$$

616) Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $2.7n^2 - 0.5n + 1$,

(b) $0.35 \cdot 2^n + 5n^5$,

(c) $\sqrt{1 + 1.1n^2}$.

Ferner zeige man, daß

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

617–618) Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

617) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(x-1)^n$

618) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$

619) Man zeige:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

620) Man zeige:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{n!}, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

621–624) Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist. ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$.)

621) $f(x) = (x - \pi/2)\operatorname{sgn}(\cos x)$

622) $f(x) = (x^2 - 1)\operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$

623) $f(x) = x\operatorname{sgn}(\sin x)$

624) $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}(x)\right)$

625–628) Man zeige, daß die folgenden Funktionen stetige Umkehrfunktionen haben und bestimme diese:

625) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^3}, \quad D_f = (1, \infty)$

626) $g(x) = (1 + \sqrt{x})^7, \quad D_g = (0, \infty)$

627) $f(x) = \dfrac{1-x^7}{x^7}, \quad D_f = (1, \infty)$

628) $g(x) = (1 + \sqrt{x})^5, \quad D_g = (0, \infty)$

629) Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, daß die Funktion $y = e^{x/2} - 4x + 1$ im Intervall $[0, 1]$ sowie im Intervall $[6, 7]$ je eine Nullstelle besitzt. Wie können diese Nullstellen näherungsweise berechnet werden?

630) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

631) Man leite die unendlichen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch Entwicklung der beiden Funktionen in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her.

632) Man approximiere die Funktion $f(x) = 8(x + 1)^{3/2}$ in eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$. Wie groß ist jeweils der Fehler an der Stelle $x = 1/2$?

633) Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(a) Stellen Sie f, g und h als Potenzreihen mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ dar und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(b) Berechnen Sie das Cauchyprodukt der Reihen von f und g.

634–637) Die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

634) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

635) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

636) Man beweise die Formel $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

637) Man beweise die Formel $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

638) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

639) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 - x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

640) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 + 3x - 3x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

641) Wie 634, nur für $x_0 = 1$.

642) Wie 635, nur für $x_0 = 2$.

643) Wie 638, nur für $x_0 = 3$.

644) Wie 639, nur für $x_0 = -1$.

645) Wie 640, nur für $x_0 = -3$.

646) Wie 638, nur für $x_0 = -3$.

647) Wie 639, nur für $x_0 = -2$.

648) Man skizziere die Graphen der Funktionen
$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad f_4(x) = |\cos x|, \quad f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$
im Intervall $[0, \pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

649) Sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$, $f(a) > a$ und $f(x) \neq x$ für $0 < x < a$. Man zeige, daß dann auch $f(x) > x$ für $0 < x < a$ gilt.

650) Man zeige, daß es zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ wenigstens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

651) Man skizziere den Verlauf der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ und beweise, daß $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert besitzt, indem man die beiden Folgen $x_n = 1/(n\pi)$ und $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ betrachtet.

652) Man berechne die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

653) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1/2} (1-2x)\tan(\pi x)$

654–659) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

654) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-5x+2}}$

655) $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)$

656) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-6x+3}}$

657) $f(x) = \mathrm{Arccos}\left(\sqrt[4]{x^2-2}\right)$

658) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}}$

659) $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

660–661) Man zeige mittels Differenzieren:

660)

$$\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1,1)$$

661)

$$\mathrm{Arcsin}x = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad x \in (-1,1)$$

662) Zeigen Sie: Sind $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle j, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^m g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^m g_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}.$$

663) Wie ist t zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2+t)/(x-t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

664) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

665) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

666) Folgt in Bsp. 665) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

667) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

668) Folgt in Bsp. 667) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)