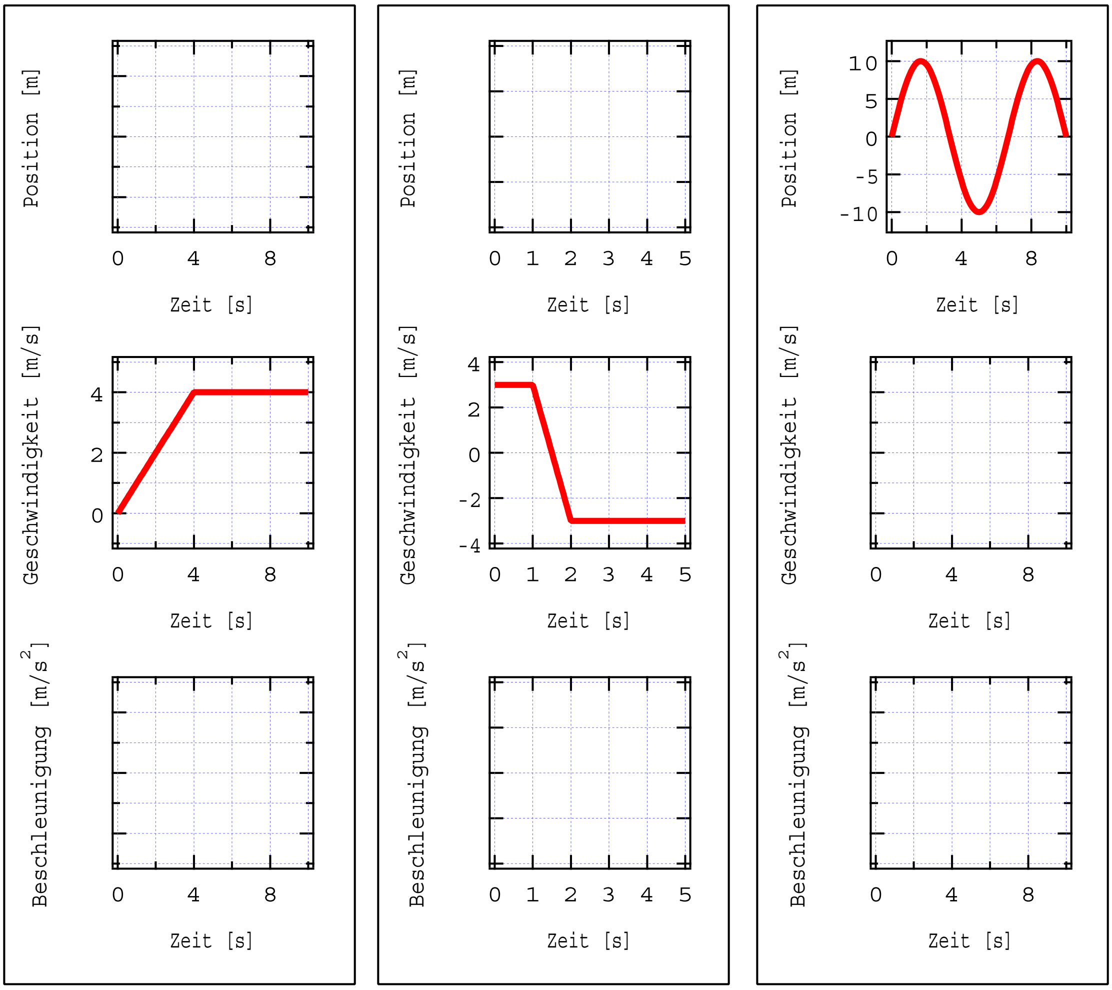
Prof. Dr. U. Keller / Dr. M. Haiml SS 2004

Übungsblatt 1 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 30.03.2004 | Abgabe bis 06.04.2004 | Rückgabe: 13.04.2004

1. Bewegungsgleichung

Du findest in einem verstaubten Buch der Bibliothek Newton's Original-Aufzeichnungen von freien Bewegungen. Ergänze die leeren Diagramme und überlege Dir (schriftlich, ein kurzer Satz), was Newton möglicherweise beobachtet hat.



Newton beobachtete:

______________________ ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________

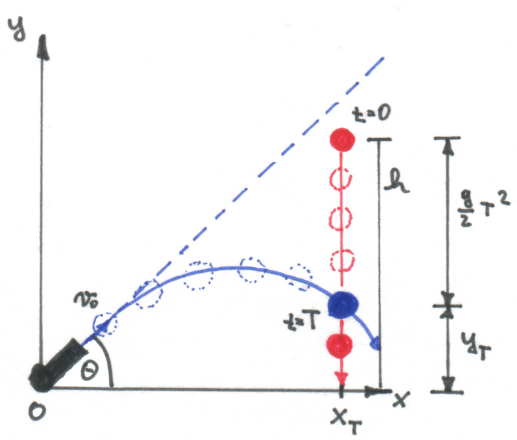
2. freier Fall mit/ohne Horizontalkomponente

Ein Tennisball hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine momentane Position $x_0 = 0$ und $y_0 = h$ sowie eine horizontale Geschwindigkeitskomponente v_0. Diese kann auch 0 sein. Für $t>0$ wirkt nur die Schwerkraft als einzige beschleunigende Kraft.

(a) Berechne die Bahnkurve in Parameterdarstellung x(t), y(t).
(b) Berechne die Bahnkurve y(x).
(c) Berechne den Zeitpunkt t, an dem der Tennisball am Boden ($y = 0$) aufschlägt. Zeige, dass dieser Zeitpunkt derselbe ist wie beim freien Fall ohne Horizontalkomponente und somit unabhängig von v_0 ist.
(d) Gib eine plausible Erklärung (in Worten), warum dieser Zeitpunkt nicht von v_0 abhängt.

3. fallende Körper treffen

Beispiel zum Vorlesungsexperiment:



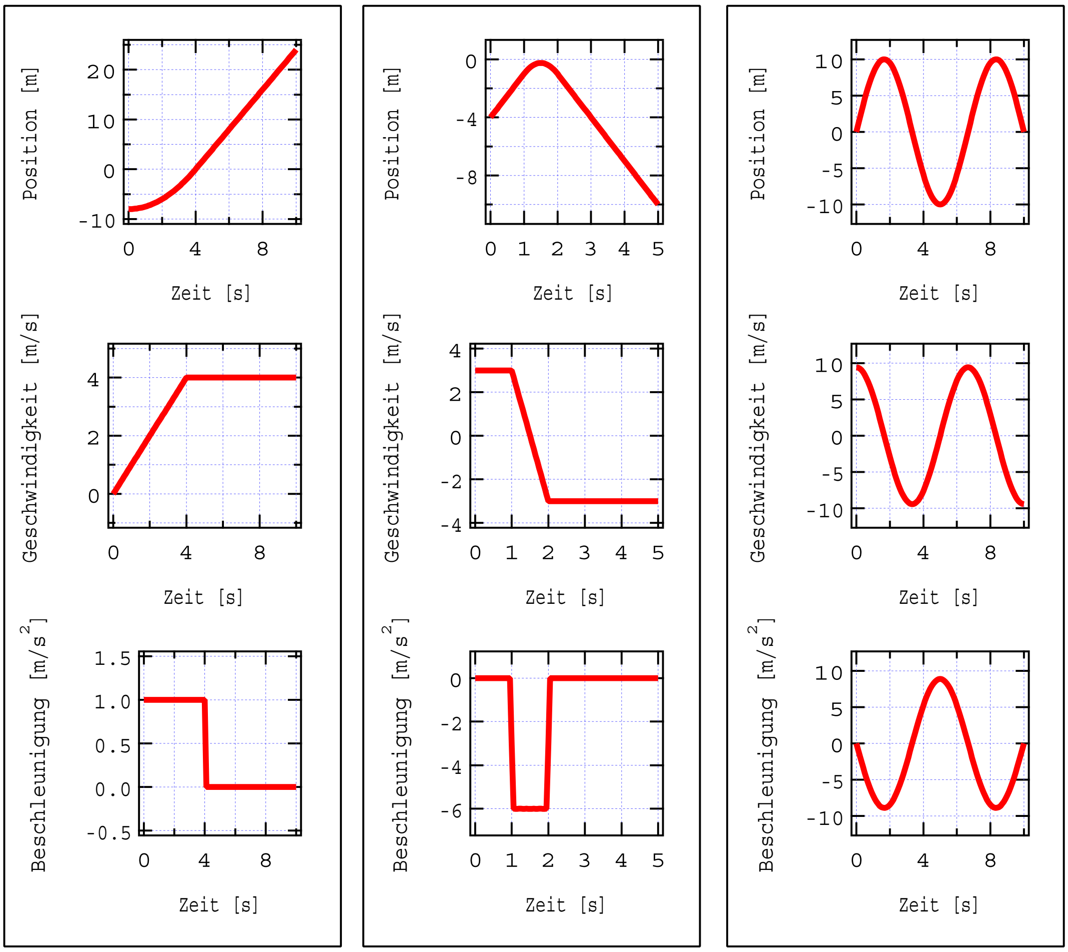
Gegeben ist eine Tennisballkanone, deren Abwurfwinkel θ und –geschwindigkeit v_0 einstellbar sind. Gleichzeitig mit dem Abschuss eines Tennisballs aus der Kanone wird in einer horizontalen Entfernung x_T ein weiterer, ruhender Tennisball aus der Höhe h fallen gelassen.

(a) Berechne die beiden Bahnkurven in Parameterdarstellung x(t), y(t).
(b) Berechne die beiden Bahnkurven y(x) der Tennisbälle, sowie den Schnittpunkt $S(x_S, y_S)$ der beiden Bahnkurven.
(c) Berechne die richtige Höhe h, sodass sich die beiden Tennisbälle treffen werden. Tipp: Berechne zuerst den Zeitpunkt T_1, an dem der Tennisball der Wurfmaschine den Schnittpunkt erreicht. Berechne dann den Zeitpunkt T_S, an dem beide Bälle dieselbe Höhe haben: $y_1(T_S)$-$y_2(T_S) = 0$. Wenn $T_S = T_1$, stossen beide Bälle zusammen.
(d) Gib eine plausible Erklärung (in Worten), warum h unabhängig von v_0 ist.

Musterlösung 1 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 06.04.2004

1. Bewegungsgleichung



Newton beobachtete:

Eine Kugel rollt von einer schiefen Ebene.

ein Papierschiffchen in der Badewanne anpusten.

kein elastischer Stoss!

ein Pendel.

2. freier Fall mit/ohne Horizontalkomponente

(a) $x(t) = v_0 t \; , \; y(t) = h - \frac{g}{2} t^2$

(b) $y(x) = y(x(t)) = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{g}{2v_0} x^2$

(c) $y(t_1) = 0 = h - \frac{g}{2} t_1^{\,2} \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \neq f(v_0)$

(d) Horizontal- und Vertikalkomponente einer freien Bewegung sind unabhängig voneinander. Folglich trägt v_0 nicht zum vertikalen Fall bei.

3. fallende Körper treffen

(a) Wurfmaschine: $x_1(t) = v_0 \cos(\theta) \cdot t \; , \; y_1(t) = v_0 \sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} t^2$

freier Fall: $x_2(t) = x_T \; , \; y_2(t) = h - \frac{g}{2} t^2$

(b) Wurfmaschine:

$$y_1(x) = y_1(x_1(t)) = v_0 \sin(\theta) \cdot \frac{x_1}{v_0 \cos(\theta)} - \frac{g}{2}\left(\frac{x_1}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 = \tan(\theta) x - \frac{g}{2(v_0 \cos(\theta))^2} x_1^{\,2}$$

freier Fall: keine Bahnkurve $y(x)$ möglich. Aber: $x_2(y_2) = x_2 = x_T$.

Schnittpunkt: $x_S = x_T \; , \; y_T = x_T \tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^{\,2} \cos^2(\theta)} x_T^{\,2}$

(c) $x_T = v_0 \cos(\theta) T_1 \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{x_T}{v_0 \cos(\theta)}$

$y_1(T_S) - y_2(T_S) = v_0 \sin(\theta) T_S - h = 0 \;\Rightarrow\; h = v_0 \sin(\theta) T_S = v_0 \sin(\theta) T_1 = x_T \tan(\theta)$

(d) Freie Bewegungen können unabhängig überlagert werden. Schaltet man (in einem Gedankenexperiment) die Schwerkraft aus, muss man auf die Position (x_T, h) zielen, um zu treffen. Dies ist natürlich unabhängig von v_0. Schaltet man nun die Schwerkraft ein, überlagert sich ein freier Fall. Der ist für beide Bälle gleich. Also treffen sie sich auch mit Schwerkraft, unabhängig von v_0. v_0 bestimmt nur die Höhe, bei der sich beide Bälle treffen.

Übungsblatt 2 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

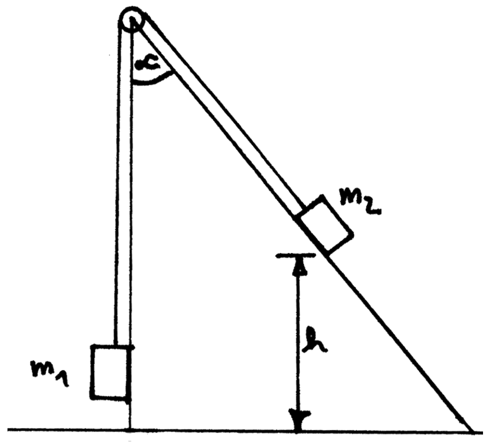
Verteilung 06.04.2004 Abgabe bis 13.04.2004 Rückgabe: 20.04.2004

1. Newton Test

Markiere alle richtigen Antworten:

- ☐ Ist die Resultierende aller Kräfte, die an einem sich bewegenden Körper angreifen, Null, so bewegt sich dieser weiterhin geradlinig gleichförmig.
- ☐ Die Resultierende aller Kräfte ist die algebraische Summe (Zahlensumme) aller Kräfte.
- ☐ An einem Körper, der in Ruhe bleibt, greifen keine Kräfte an.
- ☐ Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte einwirken, wird er in der Richtung der Resultierenden aller angreifenden Kräfte beschleunigt.
- ☐ Ein Gegenstand bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn, also ist die Resultierende aller Kräfte gleich Null.
- ☐ Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig, also wirken keine Kräfte auf ihn.
- ☐ Die Resultierende aller Kräfte, die an einem ruhenden Körper angreifen, ist Null.
- ☐ Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte angreifen, bewegt er sich in Richtung der grössten Kraft.

2. Schiefe Ebene



Gegeben sei eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α (0° = senkrechte Ebene, 90° = horizontalen Ebene). Zwei Körper mit Masse m_1 = 10 kg und m_2 = 15 kg hängen an einem dünnen, masselosen Faden, der über eine masselose Rolle läuft. Zwischen der Rolle und dem Faden soll es keine Reibung geben. Der Haftreibungskoeffizient μ_H der Masse m_2 auf der schiefen Ebene sei 0.5. Der Gleitreibungskoeffizient μ_G sei 0.2. Die Masse m_2 befindet sich 2 m über dem Boden.

a) Zeichne alle wirkenden Kräfte und deren Komponenten ein (Gewichtskraft, Normalkraft, Hangabtriebskraft, ...). Berechne die Kraft parallel zur schiefen Ebene, F_2, die ohne Reibung auf m_2 wirkt. Berechne die Haftreibungskraft F_R von m_2. Zeichne, z.B. mit einem Computerprogramm Deiner Wahl, F_2 sowie $\pm F_R$ in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α [0°, 90°]. Zeige in diesem Graphen, für welche Winkel α sich m_2 nach oben, nach unten bzw. gar nicht bewegt.

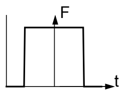
b) Gib die resultierende Kraft F auf die Masse m_2 sowie die Beschleunigung a der Massen m_1 und m_2 für diese drei Fälle an.

c) Nach welcher Zeit erreicht die Masse m_2 den Boden, falls α = 20°, 30°, 40° ist.

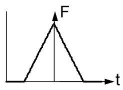
3. Impulsstoss

Ein Auto (m = 1200 kg) fahre mit einer Geschwindigkeit von 54 km/h auf ein unbewegliches Hindernis. Nach dem Aufprall rollt das Wrack mit 3.6 km/h zurück. Die Kraftübertragung erfolgt innerhalb von 0.25 s. Wie gross sind die Spitzen- und die Durchschnittskraft und –beschleunigung

a) bei konstantem Kraftverlauf.

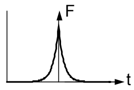


b) bei dreiecksförmigen Kraftverlauf



c) bei einem Kraftverlauf, gegeben durch

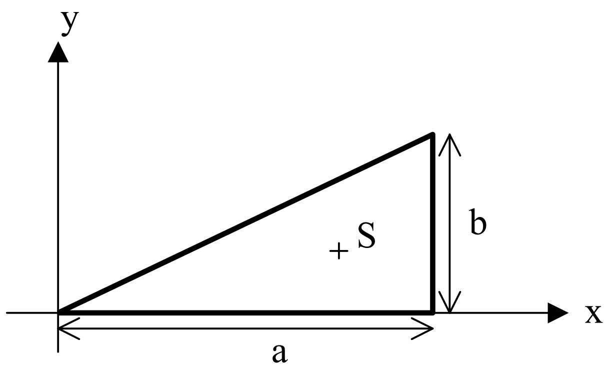
$$
\begin{array}{ll}
F = 0 & t < -0.125s \\
F = C\exp\left(\frac{t}{0.02s}\right) & -0.125s \le t \le 0 \\
F = C\exp\left(-\frac{t}{0.02s}\right) & 0s \le t \le 0.125s \\
F = 0 & t > 0.125s
\end{array}
$$



Gibt die Beschleunigung auch in Vielfachen der Erdbeschleunigung g an.

4. Schwerpunkt

Berechne den Schwerpunkt $S(x_S, y_S)$ eines Dreiecks (siehe Skizze) unter der Annahme homogener Massenbelegung in der Fläche.



Musterlösung 2 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 13.04.2004

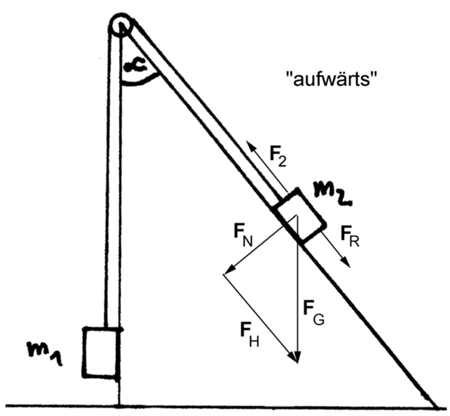
1. Newton Test

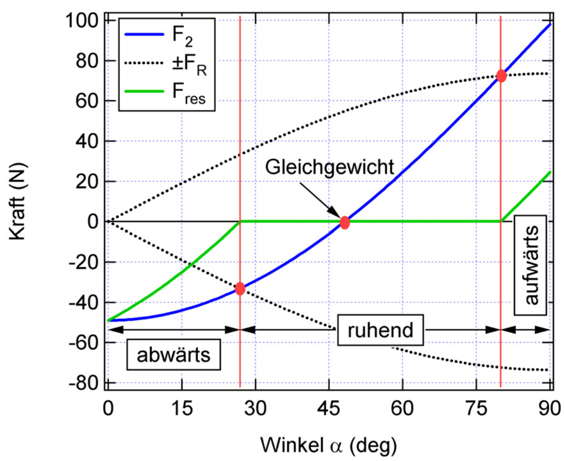
Markiere alle richtigen Antworten:

- ☒ Ist die Resultierende aller Kräfte, die an einem sich bewegenden Körper angreifen, Null, so bewegt sich dieser weiterhin geradlinig gleichförmig.
- ☐ Die Resultierende aller Kräfte ist die algebraische Summe (Zahlensumme) aller Kräfte.
- ☐ An einem Körper, der in Ruhe bleibt, greifen keine Kräfte an.
- ☒ Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte einwirken, wird er in der Richtung der Resultierenden aller angreifenden Kräfte beschleunigt.
- ☐ Ein Gegenstand bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn, also ist die Resultierende aller Kräfte gleich Null.
- ☐ Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig, also wirken keine Kräfte auf ihn.
- ☒ Die Resultierende aller Kräfte, die an einem ruhenden Körper angreifen, ist Null.
- ☐ Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte angreifen, bewegt er sich in Richtung der grössten Kraft.

2. Schiefe Ebene

a) Hangabtriebskraft und Haftreibungskraft





$F_G = m_2 g$

$F_H = m_2 g \cos\alpha$

$F_N = m_2 g \sin\alpha$

$F_2 = m_1 g - m_2 g \cos\alpha$

$F_R = \pm\mu_H m_2 g \sin\alpha$

b) resultierende Kraft

- m_2 abwärts:

$$F_{res} = m_1 g - m_2 g\cos\alpha + \mu_G m_2 g\sin\alpha$$
$$a = \frac{m_1 - m_2(\cos\alpha - \mu_G \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

- m_2 ruhend:

$$F_{res} = 0$$
$$a = 0$$

- m_2 aufwärts:

$$F_{res} = m_1 g - m_2 g\cos\alpha - \mu_G m_2 g\sin\alpha$$
$$a = \frac{m_1 - m_2(\cos\alpha + \mu_G \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

c) Fallzeit

Für $\alpha = 30°$ und $40°$ bleibt m_2 in Ruhe, daher ist die Zeit $t = \infty$.
Für $\alpha = 20°$ erhalten wir:

$$a = -1.2 m/s^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a\cos\alpha}} = 1.9s$$

3. Impulsstoss

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow \Delta p = \int F(t)dt \quad , \quad \Delta p = m\Delta v = m(v_2 - v_1)$$
$$\overline{F} = \frac{\int F(t)dt}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t}$$
$$F = m \cdot a \rightarrow a(t) = \frac{F(t)}{m} \quad , \quad \overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{\Delta p}{m\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$
$$g \approx 9.81 m/s^2$$

a) $F = \text{const}$

$$F(t) = \overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1'200 \cdot (15+1)}{0.25} kg \cdot m/s^2 = 76,8kN$$
$$a(t) = \overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 64 m/s^2 \approx 6.5g$$

b) $\underline{F\left(t[-\tfrac{\Delta t}{2},+\tfrac{\Delta t}{2}]\right)=F_0\cdot\left(1-\frac{2|t|}{\Delta t}\right)}$

$$\Delta p=m\Delta v=\int F(t)dt=\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2}F_0\left(1-\frac{2|t|}{\Delta t}\right)dt=F_0\frac{\Delta t}{2}\quad\rightarrow\quad F_0=\frac{2m\Delta v}{\Delta t}=2\overline{F}=153{,}6kN$$

$$a_0=\frac{F_0}{m}=\frac{2\overline{F}}{m}=128m/s^2\approx 13g$$

c) $\underline{F\left(t[-\tfrac{\Delta t}{2},+\tfrac{\Delta t}{2}]\right)=\mathrm{F}_0\cdot\exp\left(-|t|/\tau\right)}$

$$\Delta p=m\Delta v=\int F(t)dt=\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2}F_0\cdot\exp\left(-|t|/\tau\right)dt=2F_0\tau\left(1-\exp(-\tfrac{\Delta t}{2\tau})\right)$$

$$\rightarrow\quad F_0=\frac{m\Delta v}{2\tau\left(1-\exp(-\tfrac{\Delta t}{2\tau})\right)}=480{,}9kN$$

$$a_0=\frac{F_0}{m}=400m/s^2\approx 41g$$

4. Schwerpunkt

$$s_x=\frac{1}{m}\int_0^a x\cdot dm=\frac{1}{m}\int_0^a x\cdot\frac{y\cdot dx}{a\cdot b/2}\cdot m=\frac{1}{m}\int_0^a m\cdot x\cdot\frac{2x\cdot b}{a\cdot a\cdot b}dx=\int_0^a\frac{2x^2}{a^2}dx=\frac{2}{3}a$$

$$s_y=\frac{1}{m}\int_0^b y\cdot dm=\frac{1}{m}\int_0^b y\cdot\frac{(a-x)\cdot dy}{a\cdot b/2}\cdot m=\frac{1}{m}\int_0^b m\cdot y\cdot\frac{2(a-y\frac{a}{b})}{a\cdot b}dy=\int_0^b\frac{2y}{b}-\frac{2y^2}{b^2}dx=\frac{1}{3}b$$

$$S=(\tfrac{2}{3}a,\tfrac{1}{3}b)$$

Übungsblatt 3 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 13.04.2004 Abgabe bis 20.04.2004 Rückgabe: 27.04.2004

1. Energiesatz

Ein Körper mit der Masse $m = 0.8$ kg wird senkrecht nach oben geworfen. In der Höhe $h = 10$ m hat er noch eine kinetische Energie von 60 J.

a) Welche Maximalhöhe kann der Körper erreichen?
b) Wie hoch war seine Anfangsgeschwindigkeit?

2. inelastischer Stoss

Ein Paket der Masse $m_1 = 100$ kg gleitet aus der Ruhelage über ein Holzbrett (Neigung zur Horizontalen $\alpha = 60°$) aus einer Höhe $h = 20$ m in einen ruhenden Eisenbahnwagen der Masse $m_2 = 19'900$ kg.

Fertige eine Skizze des Problems an.
Welche Geschwindigkeit erreicht der Eisenbahnwagen?
(Annahme: gesamter Vorgang ohne Reibung.)

3. Leistung und Luftwiderstand

Ein Auto ($m = 1000$ kg) fährt unter Ausnutzung der Höchstleistung ($P = 27$ kW) auf einer ebenen Strasse mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 108$ km/h. Die Reibungskraft des Luftwiderstands sei proportional zu v^2 (altes Auto, Turbulenzen).

a) Wie gross ist die auf das Auto ausgeübte Kraft durch Luftwiderstand und Reibung?
b) Berechne die Reibungskonstante d des Luftwiderstandes.
c) Nach welcher Zeit hat sich die Geschwindigkeit auf $v_1 = 72$ km/h verringert, wenn der Motor plötzlich ausgekuppelt wird und alle Reibungskräfte proportional zu v^2 sind?

4. Rakete

Wieviel Treibstoff m_T muss eine Einstufenrakete aufnehmen, damit sie nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs die erste kosmische Geschwindigkeit von 7.9 km/s erreicht? Die Leermasse der Rakete ist $m_{leer} = 1000$ kg, die Ausströmgeschwindigkeit gegen die Rakete ist $v_{rel} = 3000$ m/s und die Brenndauer beträgt 120 s. Unterscheide zwischen (a) einem 'Start' im Weltraum ausserhalb des Gravitationsbereichs eines Himmelskörpers und (b) einem Start im Schwerefeld der Erde (Annahme: keine Reibung, konstantes $g = 9.81$ m/s^2).
c) Wird die Mindestmenge Treibstoff m_T kleiner/grösser, wenn man die Reibung bzw. die Abnahme der Gravitation mit der Höhe berücksichtigt? (keine Zahlenwerte!)

Musterlösung 3 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 20.04.2004

1. Energiesatz

a) Maximalhöhe

$$E_{pot}^2 = E_{kin}^1 + E_{pot}^1$$

$$mgh_2 = E_{kin}^1 + mgh_1$$

$$h_2 = \frac{E_{kin}^1}{mg} + h_1$$

$$h_2 = \frac{60J}{0.8kg \cdot 9.81m/s^2} + 10m = 17.65m$$

b) Anfangsgeschwindigkeit

$$E_{kin}^0 = E_{kin}^1 + E_{pot}^1$$

$$\frac{mv_0^{\ 2}}{2} = E_{kin}^1 + mgh_1$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_{kin}^1}{m} + 2gh_1}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 60J}{0.8kg} + 2 \cdot 9.81m/s^2 \cdot 10m} = 18.61m/s$$

2. inelastischer Stoss

Achtung: Beim inelastischen Stoss (gemeinsame Endgeschwindigkeit) gilt:

$$E_{kin} \neq const \qquad E_{kin}^{nachher} < E_{kin}^{vorher}$$

Aber: der Impuls bleibt erhalten:

$$\vec{p}^{\,nachher} = \vec{p}^{\,vorher}$$

$$m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 0 = (m_1 + m_2) v^{nachher}$$

$$v^{nachher} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos\alpha$$

Die Geschwindigkeit des Pakets vor dem Stoss v_1 berechnen wir aus dem Energiesatz:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^{\ 2}}{2} \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

daraus folgt:

$$v^{nachher} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} \cos\alpha = 4.95cm/s$$

3. Leistung und Luftwiderstand

a) Reibungskraft

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$F = \frac{P}{v} = \frac{27\cdot 10^3 W}{30 m/s} = 900N$$

b) Reibungskonstante d:

$$F = d\cdot v^2 \to d = \frac{F}{v^2} = \frac{900N}{30^2 m^2/s^2} = 1kg/m$$

c) Abbremsen:

$$F = ma = m\dot{v} = -d\cdot v^2$$

$$m\frac{dv}{dt} = -d\cdot v^2 \to \frac{dv}{v^2} = -\frac{d}{m}dt \to \int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^2} = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d}{m}dt \to -\frac{1}{v}\bigg|_{v_1}^{v_2} = -\frac{d}{m}t\bigg|_{t_1}^{t_2} \to \left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right) = \frac{d}{m}\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{m}{d}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right) = \frac{1'000kg}{1N/m}\left(\frac{1}{20m/s}-\frac{1}{30m/s}\right) = 16.7s$$

4. Rakete

$$\frac{dp}{dt} = F = -mg$$

$$m\dot{v} + \dot{m}v_{rel} = -mg$$

/* Bem.: $m = m(t) = m_{leer} + m_T - \dot{m}t$ mit $\dot{m} = \frac{m_T}{t_B}$ für $t = [0, t_B]$ */

Den genauen Zeitverlauf der Masse und der Geschwindigkeit brauchen wir jedoch nicht berechnen, da wir uns nur für den Anfangs- und den Endwert interessieren:

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v_{rel} = -mg$$

$$m\,dv + dm\,v_{rel} = -m\,g\,dt$$

$$\int dv + \int g\,dt = \int -v_{rel}\frac{dm}{m}$$

$$v\Big|_0^{v_1} + g\,t\Big|_0^{t_B} = -v_{rel}\ln m\Big|_{m_{leer}+m_T}^{m_{leer}}$$

$$v_1 + g\,t_B = v_{rel}\ln\frac{m_{leer}+m_T}{m_{leer}}$$

$$m_T = m_{leer}\left(\exp\left(\frac{v_1 + g\,t_B}{v_{rel}}\right) - 1\right)$$

a) $g = 0$ m/s^2 $\to$ $m_T = 12.9$ t

b) $g = 9.81$ m/s^2 $\to$ $m_T = 19.6$ t

c) Aufgrund der Reibung wird m_T grösser.
Aufgrund der Abnahme der Gravitationskraft mit der Höhe wird m_T kleiner.

Übungsblatt 4 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 20.04.2004 Abgabe 27.04.2004 Rückgabe: 04.05.2004

1. Erhaltungssätze

In einem konservativen, abgeschlossenen System bleiben folgende Grössen konstant:

- ❑ Die Gesamtenergie
- ❑ Die vektorielle Summe aller Impulse.
- ❑ Die Summe der Beträge aller Impulse.
- ❑ Die Gesamtleistung.
- ❑ Die vektorielle Summe aller Geschwindigkeiten.
- ❑ Die vektorielle Summe aller Drehimpulse.

2. Fliehkraft

Wie lange müsste ein Tag sein, um zu erreichen, dass alle Körper am Äquator kein Gewicht mehr haben? (Erdradius R_E = 6'400 km)

3. Brunnen

Auf einer Walze (Vollzylinder, M = 80 kg, r = 0.4 m) ist ein Seil aufgerollt, an dem ein Eimer (m = 10 kg) in einen Brunnen hinab gelassen wird.
Welche Geschwindigkeit hat der Eimer, wenn er eine Strecke von h = 10 m durchfallen hat? (Reibungsfreie Bewegung und masseloses Seil angenommen.)

4. Ringelspiel

Eine horizontal orientierte, kreisförmige, homogene Scheibe mit der Masse von M = 100 kg rotiert mit 10 Umdrehungen/Minute um die vertikale Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe geht. Eine Person mit einer Masse von m = 80 kg (näherungsweise als Massenpunkt anzunehmen) steht dabei auf dem Rand der Scheibe.
Mit welcher Drehzahl rotiert die Scheibe, nachdem die Person vom Rand der Scheibe zu ihrer Mitte gegangen ist? (Reibungsfreiheit vorausgesetzt).

5. Kreisel

Die Drehachse eines symmetrischen Kreisel (Masse m = 10 kg, Trägheitsmoment J = 1.5 kg m^2, Rotationsfrequenz f = 50 Hz) steht in einem Winkel von ϑ = 45° zur Horizontalen. Der Schwerpunkt des Kreisels hat einen Abstand l = 50 cm vom Lagerpunkt des Kreisels.

a) Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung des Kreisels aufgrund des Schwerkraft? (g = 9.81 m/s^2)
b) Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung des Kreisels, wenn die Achse parallel zur Horizontalen ist?

Musterlösung 4 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 27.04.2004

1. Erhaltungssätze

In einem konservativen, abgeschlossenen System bleiben folgende Grössen konstant:

- ☒ Die Gesamtenergie
- ☒ Die vektorielle Summe aller Impulse.
- ☐ Die Summe der Beträge aller Impulse.
- ☒ Die Gesamtleistung. ($P_{\text{ges}} = 0$)
- ☐ Die vektorielle Summe aller Geschwindigkeiten.
- ☒ Die vektorielle Summe aller Drehimpulse.

2. Fliehkraft

$$mg = m\varpi^2 R_E = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_E$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_E}{g}} = 5'075\,\text{s} = 1\,\text{h}\,25\,\text{min}$$

3. Brunnen

$$m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{J\,\varpi^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{M\,r^2\,\varpi^2}{2\cdot 2} = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{M\,v^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{m\,g\,h}{\frac{m}{2} + \frac{M}{4}}} = \sqrt{\frac{4\,m\,g\,h}{2m + M}} = 6.3\,\text{m/s}$$

4. Ringelspiel

$$L = \text{const}$$

$$J\,\varpi_1 + m\,r^2\,\varpi_1 = J\,\varpi_2$$

$$\frac{M\,r^2\,\varpi_1}{2} + m\,r^2\,\varpi_1 = \frac{M\,r^2\,\varpi_2}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{M + 2m}{M}\,\varpi_1 = (1 + \tfrac{2m}{M})\varpi_1$$

$$f = \frac{\varpi}{2\pi} \rightarrow f_2 = (1 + \tfrac{2m}{M})f_1 = (1 + \tfrac{2\cdot 80}{100})10\,\text{min}^{-1} = 26\,\text{min}^{-1} = 0.43\,\text{Hz}$$

5. Kreisel

a) 45° zur Horizontalen

$M = m\,g\,l\cos\vartheta$

$L = J\omega$

Achtung: Bei Verwendung der Formel $\omega_P = \dfrac{M}{L}$ aus dem Buch (Hering) muss die Richtung der L-Achse berücksichtigt werden: $\omega_P = \dfrac{M}{L\cos\vartheta}$!

Besser verständlich ist der Ansatz mit $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$.

$\dot{\vec{L}}$ steht normal auf die Drehachse der Präzession von $\vec{L}$ (hier die Lotrechte) und normal auf den Radius der Präzession von $\vec{L}$, $r = L\cos\vartheta$

Und damit:

$$\omega_P = \frac{\dot{L}}{r} = \frac{\dot{L}}{L\cos\vartheta} = \frac{M}{L\cos\vartheta}$$

Somit:

$$f_P = \frac{\omega_P}{2\pi} = \frac{m\,g\,l}{4\pi^2 J\,f} = \frac{10\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.5\,\mathrm{m}}{4\cdot 9.87\cdot 1.5\,\mathrm{kg\,m^2}\cdot 50\,\mathrm{s^{-1}}} = 16\,\mathrm{mHz} = 1\,\mathrm{min^{-1}}$$

a) parallel zur Horizontalen

Da ω_P unabhängig vom Winkel ϑ ist (siehe oben), erhalten wir ebenfalls $f_P = 1\ \mathrm{min}^{-1}$.

Übungsblatt 5 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 27.04.2004 Abgabe bis 04.05.2004 Rückgabe: 11.05.2004

1. Schwebung

Bei der Überlagerung (Summe) zweier Schwingungen gleicher Amplitude mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 entsteht eine Schwebung.

- Dabei entstehen zwei neue Schwingungen mit den Frequenzen $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$
- Das ist eine lineare Überlagerung, also können keine Frequenzkomponenten bei $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ entstehen.
- Die Schwebung kann man beschreiben als Schwingung mit der "Trägerfrequenz" $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ deren Amplitude mit $\sin(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \varphi)$ moduliert wird.

2. Amplitudenmodulation

Gegeben sei eine Schwingung ("Träger") der Form .
Dieser Träger wird amplitudenmoduliert, z.B. durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + \varepsilon \sin(\Omega t)$ mit $\varepsilon < 1$.
Zeigen Sie, dass in diesem Fall tatsächlich neue Frequenzen entstehen. Welche?

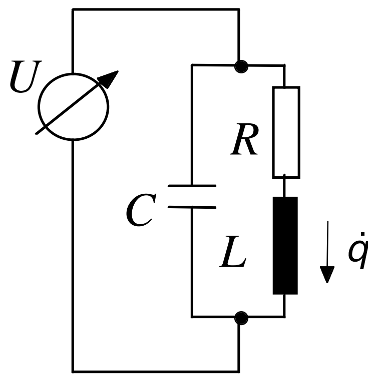
3. ungedämpfte lineare Schwingung

Ein Kraftfahrer (m_K = 100 kg) setzt sich in sein Auto (m_A = 900 kg), wodurch sich dieses um 4 cm senkt. Wie gross ist die Periodendauer T der vertikalen Eigenschwingung des Autos samt Fahrer?

4. gedämpfte Schwingung

Eine, an einer Feder (Federkonstante c) aufgehängte Kugel (Masse m = 1 kg) ist in ein Wasserbecken eingetaucht. Die Reibungskraft ($F_R = -b\ v$) ist proportional zur Geschwindigkeit der Kugel. Die Frequenz f_d der gedämpften Schwingung ist 1.2 Hz. Die Resonanzfrequenz f_{res} beträgt 1.1 Hz.
Wie gross ist die Federkonstante c sowie die Reibungskonstante b?

5. RCL-Schwingkreis



Betrachten Sie einen RLC-Schwingkreis (siehe Abbildung), zunächst aber ohne den Widerstand R.

a) Welche Resonanzfrequenz ergibt sich für L=0.1 mH und C=100 nF ?

b) Bei einer Spannungsamplitude U=1V wird welche Ladung q im Kondensator gespeichert ? Wie gross ist demzufolge die Energie E im Schwingkreis ? Welcher maximale Strom fliesst in der Spule ?

c) Nun berücksichtigen wir den Widerstand der Spule. Für welchen Wert von R ergibt sich der aperiodische Grenzfall ?

d) Bestimmen Sie die Dämpfung für R=5 Ω. Nach wieviel Oszillationen ist die Schwingung auf die Hälfte der ursprünglichen Amplitude abgefallen? Welche Kreisgüte Q=1/(2D) ergibt sich für diesen Fall ?

e) Wieviel Prozent der Schwingkreisenergie wird pro Oszillation im Widerstand R=5 Ω dissipiert ?

Musterlösung 5 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 04.05.2004

1. Schwebung

☐ Dabei entstehen zwei neue Schwingungen mit den Frequenzen $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$

☒ Das ist eine lineare Überlagerung, also können keine Frequenzkomponenten bei $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ entstehen.

☒ Die Schwebung kann man beschreiben als Schwingung mit der "Trägerfrequenz" $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ deren Amplidute mit $\sin(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\varphi)$ moduliert wird.

2. Amplitudenmodulation

$A\cdot\sin(\omega t)\cdot[1+\varepsilon\cdot\sin(\Omega t)]$ durch umformen mit Hilfe der Beziehung

$\sin(ax)\sin(bx)=\frac{1}{2}\{\cos[(a-b)x]+\cos[(a+b)x]\}$ kriegt man :

$$A\sin(\omega t)+A\varepsilon\frac{1}{2}\{\cos[(\omega-\Omega)t]-\cos[(\omega+\Omega)t]\}$$

Die neue Frequenzen sind : ω-Ω und ω+Ω

3. ungedämpfte lineare Schwingung

Für die Auslenkung von 4 cm $c=\frac{100kg\cdot 9.81m/s^2}{0.04m}$ = 24525 [N/m]

und mit $\omega_0^2=\frac{c}{m_K+m_A} \quad\rightarrow\quad \omega_0=4.95\ \ [rad/s]$

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ = 1.27 [s]

4. gedämpfte Schwingung

$$\omega_{res} = 2\pi \cdot f_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$$\frac{\omega_{res}^2}{\omega_d^2} = \frac{f_{res}^2}{f_d^2} = \frac{1 - 2D^2}{1 - D^2} \quad \rightarrow \quad D = 0.371 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 8.12 \text{ rad/s}$$

und $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \rightarrow \quad c = m \cdot \omega_0^2 = 65.9 \text{ kg/s}^2$

$D = \frac{b}{2m} \frac{1}{\omega_0}$ mit $\quad \rightarrow \quad b = 2m\omega_0 D = 6.03 \text{ kg/s}$

5. RCL-Schwingkreis

a) Resonanzfrequenz $\omega_{res} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 316$ krad/s und $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50$ kHz

b) $U_{\max}$=1V, $C=q/U_{\max}$

$$C = q_{\max} / U_{\max} \Rightarrow q_{\max} = CU_{\max} = \underline{100 \text{ nC}}.$$

$$E_{\text{el}} = q_{\max}^2 / (2C) = CU_{\max}^2 / 2 = \underline{50 \text{ nJ}}.$$

$$E_{\text{magn}} = LI_{\max}^2 / 2 = E_{\text{el}} \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L}} U_{\max} = \underline{31.6 \text{ mA.}}$$

c) Der aperiodische Grenzfall ergibt sich, wenn $\omega_0 = \delta \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = \underline{63.2\ \Omega}$

d) Für R=5 Ω ergibt sich $\delta = R/2L = 25'000 \text{ s}^{-1}$.

Das Dämpfungsverhältnis $k = e^{\delta T_d}$ mit $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ ist $k = 1.65$.

Nach in n Perioden soll die Amplidute um $k^n = 2$ gedämpft sein.

Somit: $n = \frac{\ln 2}{\ln k} = 1.4$ - das entspricht 28 μs.

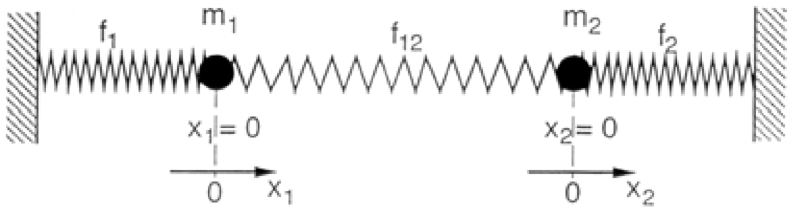
Der Gütefaktor ergibt sich zu $Q = \frac{1}{2D} = \frac{\omega_0}{2\delta} = 6.32$

e) Pro Periodendauer T_d sinkt die maximale Ladung am Kondensator auf des vorherigen Wertes. Da der Energieinhalt des Kondensators quadratisch von der Ladung abhängt ($E_{\text{el}} = Q^2 / (2C)$), sinkt die Energie im Schwingkreis um 63% pro Oszillation.

Übungsblatt 6 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 04.04.2004 Abgabe bis 11.05.2004 Rückgabe: 25.05.2004

1. gekoppeltes Federpendel



Gegeben sei obiges gekoppeltes Federpendel mit den Massen m_1 und m_2, die durch Federn mit den Rückstellkonstanten f_1 bzw. f_2 an fixe Aufhängungspunkte (Wand) gebunden sind, sowie durch eine Feder mit Rückstellkonstante f_{12} gekoppelt sind. Im Ruhezustand befindet sich m_1 am Ort $x_1 = 0$ und m_2 am Ort $x_2 = 0$.

a) Stelle das Differentialgleichungssystem auf, das die gekoppelte Bewegung der beiden Masse beschreibt.

b) Finde für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und $f_1 = f_2 = f_{12} = f$ eine geeignete Variablen-substitution von (x_1, x_2) auf *Normalkoordinaten* (ξ_1, ξ_2), sodass das Differenzialgleichungssystem entkoppelt ist. Löse dieses für $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$.

c) Mache eine einfache Skizze, wie die beiden Normalschwingungen aussehen. Wie hoch sind die Frequenzen Ω_1 und Ω_2 der beiden Normalschwingungen?

d) Mache die Rücktransformation auf $(x_1(t), x_2(t))$.

2. Normalschwingungen (Zusatzaufgabe)

Finde die Normalschwingungen aus Aufgabe 1 für den Fall $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $f_1 = 3f$, $f_2 = f$ und $f_{12} = f$.

Eine Normalschwingung eines Systems ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A_k \exp[\mathrm{i}\Omega_k t] \begin{pmatrix} v_1^k \\ \dots \\ v_n^k \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x} = A_k \exp[\mathrm{i}\Omega_k t] \cdot \vec{v}_k$$

Ein System mit n Freiheitsgraden hat üblicherweise n Normalschwingungen. $\vec{v}_k$ sind dabei die Normalkoordinaten und Ω_k die Eigen(kreis)frequenz der k-ten Normal-schwingung. A_k und $\vec{v}_k$ können komplex sein, d.h. im allgemeinen Fall kann eine Phasenverschiebung der Schwingungen der einzelnen Massen bestehen.

Das Differentialgleichungssystem aus Aufgabe 1 lässt sich schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ wobei für eine Normalschwingung gilt: } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\Omega^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Eigenwerte $(-\Omega^2)$ der Matrix die Eigenfrequenzen der

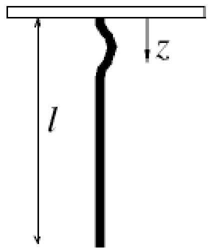
Normalschwingungen ergeben und die Eigenvektoren die Normalkoordinaten sind.

Finde die Eigenwerte und –vektoren des Diff.Gl.System aus 1a) für den obigen Spezialfall. Gib die beiden Normalschwingungen der Form $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ sowie die allgemeine Schwingung (Superposition) des gekoppelten Federpendels an.

3. Ebene Wellen

Zwei ebene Wellen der Frequenzen f_1 = 300 Hz und f_2 = 240 Hz laufen mit der Phasengeschwindigkeit c = 340 m/s in die gleiche Richtung. In einem Punkt A haben sie gleiche Phasen. Nach welcher Laufstrecke x und Laufzeit t sind sie zum ersten Mal wieder in gleicher Phase?

4. Seilwelle



Ein frei hängendes Seil mit Massenbelegung m' (Einheit kg/m) und Länge l = 5 m ist bei z = 0 m aufgehängt. Entlang des Seiles bewegt sich eine Auslenkung $\xi(z,t)$.

a) Mit welcher Geschwindigkeit v_s bewegt sich die Auslenkung? (Formel)
Hinweis: Die Zugkraft $F(z)$ entsteht durch das Gewicht des Seiles und ist ortsabhängig! Nimm an, dass die Auslenkung ξ klein ist gegen die Länge l.

b) Wann erreicht die Auslenkung das Seilende, wenn es oben angeschlagen wird?

Musterlösung 6 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 11.05.2004

1. gekoppeltes Federpendel

a) Differentialgleichung:

$$m_1\ddot{x}_1 = -f_1x_1 - f_{12}(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -f_2x_2 - f_{12}(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

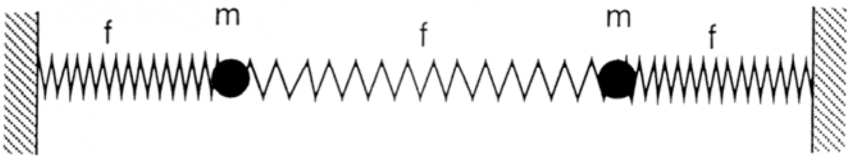
b) Wir erraten - oder erhalten durch addieren bzw. subtrahieren von (1) und (2):

$\xi_1 = x_1 + x_2$ und $\xi_2 = x_1 - x_2$. Damit folgt:

$$\ddot{\xi}_1 = -\frac{f}{m}\xi \quad \rightarrow \quad \xi_1(\mathrm{t}) = \mathrm{A}_1\exp[\Omega_1 t] \qquad \text{mit} \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{m}}}\ \mathrm{t}$$

$$\ddot{\xi}_2 = -\frac{3f}{m}\xi \quad \rightarrow \quad \xi_2(\mathrm{t}) = \mathrm{A}_2\exp[\Omega_2 t] \quad \text{mit} \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{3\mathrm{f}}{\mathrm{m}}}\ \mathrm{t}$$

c) 2 Normalschwingungen: $(\xi_1(\mathrm{t})\,, \xi_2 = 0))$ und $(\xi_1 = 0\,, \xi_2(\mathrm{t}))$



$\Omega = \sqrt{\dfrac{f}{m}}$

$\Omega = \sqrt{\dfrac{3f}{m}}$

d)

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{m}}} \;:\; \xi_1(\mathrm{t})\,, \xi_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \exp\left[\sqrt{\frac{f}{m}}\, t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{3\mathrm{f}}{\mathrm{m}}} \;:\; \xi_2(t)\,, \xi_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_2 \exp\left[\sqrt{\frac{3f}{m}}\, t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. gekoppeltes Federpendel

$$3m\,\ddot{x}_1 = -3f\,x_1 - f(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

$$m\,\ddot{x}_2 = -f\,x_2 - f(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{4f}{3m} & \frac{f}{3m} \\ \frac{3f}{3m} & -\frac{6f}{3m} \end{pmatrix}\vec{x} = \frac{f}{3m}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Aus den Eigenwerten erhalten wir die Eigenfrequenzen:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -3, -7 \quad \rightarrow \quad -\Omega_{1,2}{}^2 = \frac{f}{3m}\lambda_{1,2}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{f}{m}} \quad , \quad \sqrt{\frac{7f}{3m}}$$

Aus den Eigenvektoren erhalten wir die Normalkoordinaten:

Löse z.B. $(-4-\lambda)x_1 + 1x_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1$ und $x_2 = -3x_1$.

Also: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Diese sind so zu interpretieren, dass für die Normalschwingung

mit Ω_1 gilt: $x_2 = x_1$ bzw.

für Ω_2 gilt: $x_2 = -3x_1$

Die beiden Normalschwingungen lassen sich schreiben als:

$$\vec{x} = A_1 \exp\left[i\sqrt{\frac{f}{m}}t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = A_2 \exp\left[i\sqrt{\frac{7f}{3m}}t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des gekoppelten Pendels ist somit:

$$\vec{x} = A_1 \exp\left[i\sqrt{\frac{f}{m}}t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \exp\left[i\sqrt{\frac{7f}{3m}}t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

wobei mögliche Phasenunterschiede in den komplexen Amplituden A_1 und A_2 stecken.

Bem.: Am Ende jeder Aufgabe und vor allem in der VD-Prüfung solltest Du einen 'sanity-check' machen. Du solltest Dein Ergebnis also auf Plausibilität überprüfen.

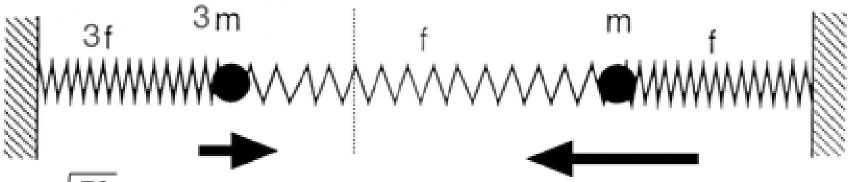
Hier ein Beispiel:

Terme in exp[x], ln[x], etc. wie hier $\sqrt{\frac{f}{m}}t$, müssen einheitenlos sein:

$$\sqrt{\frac{kg \cdot s^{-2}}{kg}}s = 1. \rightarrow \text{o.k.}$$

Ohne Kopplung f_{12} ergibt sich für beide Massen die selbe Eigenfrequenz von $\sqrt{\frac{f}{m}} = \sqrt{\frac{3f}{3m}}$. Daher erwarten wir auch eine Normalschwingung mit dieser Frequenz, bei der sich beide Massen mit gleicher Amplitude in Phase bewegen. In diesem Fall könnten wir nämlich die Kopplungsfeder auch wegnehmen. Unser erstes Ergebnis $\Omega_1 = \sqrt{\frac{f}{m}}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ macht also Sinn. → o.k.

Für unsere zweite Normalschwingung erhalten wir, dass die 3-mal leichtere Masse eine 3-mal grössere Amplitude hat. Der Fixpunkt der Kopplungsfeder teilt die Feder dann im Verhältnis 1:3 (siehe strichlierte Linie Abbildung unten). Damit ist die „effektive" Rückstellkonstante für m_2 3-mal stärker als für m_1. Somit „sehen" beide Massen equivalente „Federkräfte" und schwingen damit mit der selben Frequenz Ω_2. → o.k.



$$\Omega = \sqrt{\frac{7f}{3m}}$$

da im Vergleich zu Aufgabe 1 die Summe der Massen schwerer ist ($4m$ vs. $2m$), die Rückstellkonstante der Kopplungsfeder aber gleich geblieben ist (f), ergibt sich eine „schwächere" Kopplung, was zu einer geringeren Aufspaltung der beiden Eigenfrequenzen führen sollte. In der Tat: $\sqrt{\frac{f}{m}} < \sqrt{\frac{7f}{3m}} < \sqrt{\frac{3f}{m}}$. → o.k.

Wir können also zuversichtlich, wenn auch nicht ganz sicher sein, dass unsere Lösung richtig ist.

Dieses Beispiel soll zeigen, wie Du in etwa Deine Ergebnisse prüfen solltest. Dies musst Du nicht immer schriftlich machen und auch nicht so ausführlich wie oben. Du solltest Dir jedoch angewöhnen, stets kurze 'sanity-check' der Form „Macht das denn Sinn?" zu machen.

3. Ebene Wellen

Ebene Welle: $y(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \varphi_0]$.

Phase: $\phi = \omega t - kx + \varphi_0 = 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0$

Am Punkt A sind beide Phasen gleich. Die Phasen beider Wellen sind auch an all jenen Orten/Zeitpunkten gleich, für die gilt:

$$\Delta\phi = \pm n \cdot 2\pi = \pm 2\pi \Delta f\,(t - \frac{x}{c}) \rightarrow x = c\,t \mp n\frac{c}{\Delta f} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x}{c} \pm n\frac{1}{\Delta f}$$

Betrachten wir einen fixen Zeitpunkt $t = 0$, so sind beide Wellen nach einer Strecke x *das erste Mal* wieder in Phase, wenn gilt:

$$\Delta\phi = -2\pi = -2\pi\Delta f\,(-\frac{x}{c}) \rightarrow x = \frac{c}{\Delta f} = \frac{340 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} = 5.66 \text{ m}$$

Betrachten wir einen fixen Ort, z.B. den Ort A, so sind beide Wellen nach einer Zeitdauer *t das erste Mal* wieder in Phase, wenn gilt:

$$\Delta\phi = 2\pi = 2\pi\Delta f\,(t) \rightarrow t = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{60 \text{ s}^{-1}} = 16.7 \text{ ms}$$

4. Seilwelle

Zugkraft: $F(z) = m'(l - z)g$

Geschwindigkeit: $v_s(z) = \sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \sqrt{\frac{m'(l-z)g}{m'}} = \sqrt{(l-z)g}$

Lösen der Bewegungsgleichung:

$$v_s(z) = \frac{dz}{dt}$$

$$dt = \frac{dz}{v_s(z)} = \frac{dz}{\sqrt{(l-z)g}}$$

$$t = \left[\frac{1}{\sqrt{g}}(-2)(l-z)^{1/2}\right]_0^l = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.43\text{s}$$

Übungsblatt 7 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 06.04.2004 Abgabe bis 25.05.2004 Rückgabe: 01.06.2004

1. Energietransport

Ein Seil mit Massenbelegung $m' = 0.2$ kg/m ist mit der Kraft $F = 500$ N gespannt.

a) Wie gross ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf dem Seil?

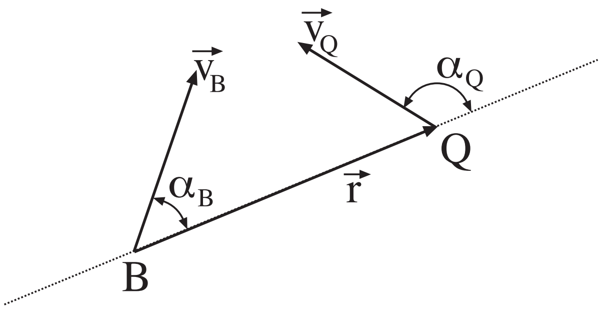
b) Bestimme allgemein die Energie pro Längeneinheit die in einer Seilwelle $\xi(x,t) = A \sin[k(x-v_s t)]$ mit Amplitude A und der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ gespeichert ist. Hinweis: Berechne die kinetische Energie pro Längeneinheit. Benutze ohne Herleitung, dass die Summe von kinetischer und potentieller Energie konstant ist. Benutze ohne Herleitung, dass die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie ist.

c) Bestimme allgemein, welche Leistung von einer Seilwelle transportiert wird.

d) Welche mittlere antreibende Leistung ist notwendig um eine Seilwelle mit der Amplitude $\hat{a} = 1$ cm und der Wellenlänge $\lambda = 0.5$ m auf dem Seil mit obigen Daten zu erzeugen?

2. Doppler-Effekt

Leite den Doppler-Effekt für den allgemeinen, nichtrelativistischen Fall her.



Ein Beobachter B bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_B in einem Winkel α_B zur Verbindungslinie Beobachter B - Quelle Q. Die Quelle Q bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_Q in einem Winkel α_Q zur Verbindungslinie B-Q. Die Quelle emittiert (Kugel)wellen bei einer Frequenz f_Q welche sich mit der Phasengeschwindigkeit c im Raum ausbreiten.

Zeige, dass die vom Beobachter B gemessene Frequenz f_B gegeben ist durch:

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B \cos\alpha_B}{c + v_Q \cos\alpha_Q}$$

3. Michelson-Interferometer

a) Die detektierte Intensität eines Michelson Interferometers mit monochromatischem Licht ist gegeben durch $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$. (siehe Vorlesung, bzw. Hering, Kap. 5). Meist interessiert nur der Interferenzterm $2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$, z.B. zur genauen Längenmessung. Im Vakuum gilt: für einen Verschiebeweg eines Spiegels um

Δx.

Zeige, dass eine Phasendifferenz entsteht, wenn bei konstanter Armlänge ($\Delta x = 0$) sich der Brechungsindex in einem Arm ändert. Hinweis: Die Wellenlänge λ_n in einem Medium mit Brechungsindex n ist $\lambda_n = \lambda_0 / n$, wenn λ_0 die Wellenlänge in Vakuum ist.

Finde eine Formel für die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ als Funktion der Armlänge L, der Vakuumwellenlänge λ_0, und der Änderung der Brechzahl Δn.

b) Für die Bestimmung der Brechzahl von Ammoniak bringt man in einen der Arme eine leer gepumpte Röhre mit der Länge $l = 14$ cm, in den anderen eine gleiche, gefüllt mit Luft ($n_{\text{Luft}} = 1.00029$). Die Enden der Röhren sind mit planparallelen Gläsern verschlossen. Während dem Füllen der leeren Röhre mit NH_3–Gas beobachtet man für die Wellenlänge $\lambda = 590$ nm eine Folge von Interferenzmaxima und -minima auf dem Detektor. Insgesamt zählt man 180 Intensitätsmaxima.

Berechne aus diesen Angaben die Brechzahl von Ammoniak.

Da man nicht genau bei einem Maximum beginnt und auch nicht genau bei einem Maximum endet, müsste man statt 180 eine Anzahl zwischen 180 und 182 verwenden. Welche Genauigkeit ergibt sich somit für die Brechzahlmessung? Wie könnte man die Genauigkeit der Messmethode verbessern?

Musterlösung 7 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 25.05.2004

1. Energietransport

a) Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_s = \sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \sqrt{\frac{F}{m'}} = \sqrt{\frac{500\,\mathrm{N}}{0.2\,\mathrm{kg/m}}} = 50\,\mathrm{m/s}$

Bemerkung zur Bezeichnung *m'* als Massenbelegung:
In der Physik sind folgende Abkürzungen üblich:

$a',\ a'',\ ...$	totales Differential nach einer Ortsvariablen	$\frac{da}{dx}, \frac{da}{dz}, \frac{da}{dl}, ...\ /\ \frac{d^2a}{dx^2}, ...$
$\dot{a},\ \ddot{a},\ ...$	totales Differential nach der Zeit	$\frac{da}{dt}\ /\ \frac{d^2a}{dt^2}$
$\bar{a}$	Zeit-, evtl. Ortsmittelwert (je nach Kontext)	$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} a(t)\,dt\ ,\ \frac{1}{L}\int_{z=0}^{L} a(z)\,dz$
$\hat{a}$	Amplitude	$a(t) = \hat{a}\cos(\omega t)$
$\tilde{a}$	Fouriertransformierte	$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{+\infty} a(t)\,dt$

Insofern ist das Apostroph in *m'* nicht einfach willkürlich gewählt um *m'* von *m* zu unterscheiden. Vielmehr gilt: $m = lA\rho$ und somit $\frac{dm}{dx} = m' = A\rho$.
Wir verwenden hier *A* für die Querschnittsfläche und $\hat{a}$ für die Amplitude.

b) Energie pro Längeneinheit.

Achtung: Der Ansatz Energie pro Längeneinheit $E'_{kin} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}m(x)v^2(x)\right)$ ist falsch!

Die gesamte kinetische Energie ist nämlich nicht $\frac{1}{2}mv^2$, sondern

$$E_{kin}^{ges} = \int \frac{1}{2}\frac{dm}{dx}v^2(x)dx$$

Richtig ist: $E'_{kin} = \frac{1}{2}m'v^2 = \frac{1}{2}m'\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m'\hat{a}^2k^2{v_s}^2\cos^2[k(x - v_s t)]$.

Entweder können wir $E' = E'_{kin} + E'_{pot} = 2\bar{E}'_{kin}$ verwenden,
oder wir verwenden, dass im Nulldurchgang $E'_{pot} = 0$ und somit:

$$E' = \frac{1}{2}m'\hat{a}^2k^2{v_s}^2 = \frac{1}{2}m'\hat{a}^2\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{F}{m'} = \frac{2\pi^2F\hat{a}^2}{\lambda^2}$$

c) Leistung:
Die Energiedichte dE wandert mit v_s entlang des Seiles und muss am Beginn des Seiles nachgeliefert werden. Somit:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = E' \cdot v_s = \frac{2\pi^2 F^{3/2} \hat{a}^2}{\lambda^2 m'^{1/2}}$$

d) $P = \dfrac{2\pi^2 500^{3/2} 0.01^2}{0.5^2 0.2^{1/2}} \dfrac{(\mathrm{kg\,m/s^2})^{3/2}\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2(\mathrm{kg/m})^{1/2}} = 197 \dfrac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3} = 197\,\mathrm{W}$ (bei f = 100 Hz)

2. Doppler-Effekt

Die Wellenlänge im Medium in Richtung $-\vec{r}$ ist gegeben durch:

$$\lambda = \frac{c}{f_Q} + \frac{v_Q \cos\alpha_Q}{f_Q}$$

Die beobactete Frequenz ergibt sich aus:

$$f_B = \frac{c}{\lambda} + \frac{v_B \cos\alpha_B}{\lambda} = f_Q \frac{c + v_B \cos\alpha_B}{c + v_Q \cos\alpha_Q}$$

3. Michelson Interferometer

a) Die Phase einer Welle ist gegeben durch:
$\varphi = \omega t - kz = \omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda_n} z = \omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda_0} nz$. Die Phasendifferenz zwischen zwei Punkten A und B im Abstand L bei einer Wellenlänge λ beträgt somit: $\Delta\varphi = 2\pi \dfrac{L}{\lambda_n} = 2\pi \dfrac{nL}{\lambda_0}$
Allgemein gilt, dass für Interferenzeffekte anstelle der physikalischen Weglänge $L = \int dz$ die optische Weglänge $L_{opt} = \int n(z)\,dz$ verwendet werden muss.

Wenn sich nun die Brechzahl n z.b. des Arms 2 eines Michelson Interferometer von n auf $n + \delta n$ ändert, gilt: $\delta\varphi = \varphi_2(n + \delta n) - \varphi_2(n)$. Die Phasen*änderung* ist natürlich unabhängig von der Phase des Armes 1.
Damit erhalten wir: $\delta\varphi = 2\pi \dfrac{2(n+\delta n)L}{\lambda_o} - 2\pi \dfrac{2nL}{\lambda_o} = 2\pi \dfrac{2\delta n L}{\lambda_o} = 2\pi \dfrac{2\delta L_{opt}}{\lambda_o}$

b) Wie oben schon erwähnt, ist die Phasen*änderung* des Interferometers nicht abhängig vom ersten Arm, wenn sich nur der zweite Arm ändert.
Für N Maxima erhalten wir für die Phasenänderung
$\delta\varphi = \dfrac{4\pi l}{\lambda_0} \delta n = \dfrac{4\pi l}{\lambda_0}(n_{NH_3} - 1) \cong 2\pi(N-1)$ und somit

$$n_{NH_3} = 1 + \frac{\lambda_0}{2l}(N-1) = 1.00038$$

Normalerweise ist die Phasenänderung kein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Zusätzlich haben beide Arme zu Beginn nicht exakt dieselbe Phase. Somit machen wir beim Zählen der Maxima sowohl zu Beginn als auch am Ende einen Fehler von höchstens einem Maximum. Die tatsächliche Brechzahl n_{NH3} kann somit um maximal grosser sein, bzw. $n_{NH_3} = 1.000379 \pm 0.000002$

Die Genauigkeit der Messung kann verbessert werden durch:
- kleinere Wellenlänge
- längere Röhren
- durch Abgleichen des ersten Armes kann zumindest der Fehler zu Beginn reduziert werden. Dazu wird entweder die Armlänge oder die Luftmenge in der ersten Röhre so eingestellt, dass zu Beginn ein Maximum oder ein Minimum detektiert wird. (Minima sind experimentell einfacher einzustellen!).
- durch Verwendung von ‘fraktionalen Maxima’: Wenn die Amplitude der Interferenz konstant und bekannt ist, und die Phasenänderung monoton ist, lassen sich Phasenänderungen kleiner 2π messen. Verwendet man beide Ausgänge des Interferometers, lassen sich Phasenänderungen kleiner als 2π unabhängig von der Amplitude sehr genau messen.

Übungsblatt 8 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 13.04.2004 Abgabe bis 01.06.2004 Rückgabe: 08.06.2004

1. Panflöte

a) A) Eine Alt-Panflöte besteht aus 22 Rohren. Sie reicht über drei Oktaven und ist in G-Dur gestimmt. Wie lange ist das Rohr des Grundtons g^1 mit der Frequenz 392 Hz?

b) Die Panflöte wird mit Bienenwachs gestimmt. Je nachdem ob ein Ton zu hoch oder zu tief klingt, wird Bienenwachs aus dem entsprechenden Rohr entfernt bzw. ins Rohr gestopft. Zwei Musiker möchten nun ihre beiden Panflöten aufeinander abstimmen. Beim Spielen des Grundtons g^1 hören sie 20 Schwebungen in 10 Sekunden. Um welche Strecke muss das längere Rohr mit Bienenwachs verkürzt werden?

Schallgeschwindigkeit $c = 340$ m/s

2. Eigenschwingungen einer Membran

Eine Membran der Dichte ρ sei auf einen rechteckigen Rahmen der Dimension L_1 x L_2 mit der Spannung σ gespannt. Für ein solches zweidimensionales Problem hat die Wellengleichung die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0$$

a) Zeige, dass $u = \cos(\omega t)\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ die Differentialgleichung erfüllt, falls

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho}(k_x{}^2 + k_y{}^2)$$ ist.

b) Da die Membran auf dem Rahmen fixiert ist, muss die Schwingungsamplitude $u(x, y\ \ t)$ zusätzlich die Randbedingungen

$$u(x,0,t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$
$$u(0,y,t) = 0 \quad \forall y, \forall t$$
$$u(x,L_2,t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$
$$u(L_1,y,t) = 0 \quad \forall y, \forall t$$

erfüllen. Zeige, dass das für die zulässigen Werte von k_x und k_y bedeutet, dass

$$k_x = \frac{\pi m}{L_1}$$
$$k_y = \frac{\pi n}{L_2}$$
$$n,m \in N \setminus \{0\}$$

c) Man bezeichnet die zu den Zahlen m, n gehörenden Frequenzen als Eigenfrequenzen ω_{mn} der Membran. Die kleinste ist offensichtlich ω_{11}. Welche Indizes haben und wievielmal grösser sind die nächsten 4 Eigenfrequenzen einer quadratischen Membran?

3. Abbildung mit Sammellinse

Ermittle den kleinstmöglichen Abstand *s* zwischen Gegenstand und Bild bei Abbildung mit einer Sammellinse der Brennweite $f = 5$ cm. (Rechnerischer Beweis)

4. Linse

Verschiebt man eine punktförmige Lichtquelle längs der optischen Achse einer Sammellinse von 6 cm Durchmesser und 12 cm Brennweite, so entsteht auf einem 30 cm von der Linse entfernten Bildschirm bei zwei verschiedenen Gegenstandsweiten ein durch den Lichtstrahlenkegel verursachter “Lichtfleck” von Linsengrösse. Wie weit ist die Lichtquelle in beiden Fällen von der Linse entfernt und in welchem Fall ist der Schein heller?

5. Brechungsgesetz

a) Leiten Sie das Brechungsgesetz von Snellius mit Hilfe des Fermatschen Prinzips her. Betrachten Sie dazu verschiedene Lichtwege zwischen zwei festen Punkten auf verschiedenen Seiten einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2. Aus der Forderung, dass der gesamte optische Weg minimal wird, folgt das Gesetz von Snellius.

b) Ein Lichtstrahl trifft aus einem Medium mit Brechungsindex n_0 schräg auf einen Stapel von Scheiben aus verschiedenen Materialien mit Brechungsindizes n_1, n_2, n_3, etc. Zeige, dass der Winkel des Strahls zur Normalen in jedem Medium nur vom jeweiligen Brechungsindex und dem Winkel des ursprünglichen Strahls abhängt. (Wir nehmen an, dass keine Totalreflexion auftritt.)

6. Brechung bei inhomogenem Brechungsindex

Ein paralleles Strahlenbündel (ebene Wellenfront) trifft senkrecht aus Luft ($n = 1$) auf ein planparalleles kreisrundes Glasplättchen, in welchem der Brechungsindex vom Abstand *r* von der Mitte des Plättchens abhängt: $n(r) = n_{\max} - a r^2$. Was geschieht mit dem Strahl? Dazu gibt es zwei Meinungen:

a) “Nach dem Brechungsgesetz wird ein senkrecht einfallender Strahl nicht gebrochen, un-abhängig davon, welchen Wert der Brechungsindex des Plättchens am Auftreffpunkt des Strahls hat. Die durchgehenden Strahlen werden also nicht abgebeugt, sondern erfahren lediglich eine von *r* abhängige Phasenverschiebung, die ggf. mit einer interferometrischen Messung nachgewiesen werden könnte.”

b) “Wegen der von *r* abhängigen Phasenverschiebung sind die Wellenfronten nach dem Plättchen gekrümmt. Das deutet darauf hin, dass die Strahlen zur Symmetrieachse hin gebrochen werden.“

Gehen Sie der Sache auf den Grund und begründen Sie, warum die oben beschriebenen Meinungen richtig bzw. falsch sind!

Musterlösung 8 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 01.06.2004

1. Panflöte

a) Die Grundschwingung eines Rohres besitzt einen Schwingungsknoten am geschlossenen Ende und einen Schwingungsbauch am offenen Ende. Die Rohrlänge entspricht also einem Viertel der Wellenlänge. Mit der Beziehung $\lambda f = c$ erhält man

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = \frac{340\,\mathrm{ms^{-1}}}{4\cdot 392\,s^{-1}} = 0.22\,\mathrm{m}$$

In Wirklichkeit ist das Rohr etwas kürzer (~20 cm), da der Schwingungsbauch der Luftsäule etwas ausserhalb des Rohres liegt.

b) 20 Schwebungen in 10 Sekunden entsprechen einer Schwebungsfrequenz von 2 Hz. Die Frequenz der beiden Grundtöne liegt also um $\Delta f = 2$ Hz auseinander. Das ergibt eine Längendifferenz von

$$\Delta l = \frac{c}{4}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f+\Delta f}\right) = \frac{340\,\mathrm{ms^{-1}}}{4}\left(\frac{1}{392\,\mathrm{s^{-1}}} - \frac{1}{394\,\mathrm{s^{-1}}}\right) = 1.1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \approx 1\mathrm{mm}$$

2. Eigenschwingungen einer Membran

Eine Membrane der Dichte ρ sei auf einen rechteckigen Rahmen der Dimensionen L_1, L_2 mit der Spannung σ gespannt. Für ein solches zweidimensionales Problem hat die Wellengleichung die Form

a) Einsetzen in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0$$

liefert

$$-\omega^2 u - \frac{\sigma}{\rho}(-k_x^{\,2} - k_y^{\,2})u = 0$$

Damit das für beliebige x, y, t gilt, muss

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho}(k_x^{\,2} + k_y^{\,2})$$

b) Die Randbedingungen

$$u(x,0,t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$
$$u(0,y,t) = 0 \quad \forall y, \forall t$$
$$u(x,L_2,t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$
$$u(L_1,y,t) = 0 \quad \forall y, \forall t$$

lauten dann

$$0 = 0$$
$$0 = 0$$
$$k_x L_1 = \pi m$$
$$k_y L_2 = \pi n$$

oder

$$k_x = \frac{\pi m}{L_1}$$
$$k_y = \frac{\pi n}{L_2}$$
$$n,m \in N \setminus \{0\}$$

c) Man findet

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}\left\{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right\}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\omega_{11}$$

und analog

$$\omega_{22} = 2\omega_{11}$$
$$\omega_{13} = \omega_{31} = \sqrt{\frac{10}{2}}\omega_{11}$$

Da man (im allgemeinen) nur Töne harmonisch findet, deren Frequenzen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen, würde man einen Membrandreiklang wohl ziemlich hässlich finden.

3. Abbildung mit Sammellinse

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{f\,g}{g-f}$$

$$s = b + g = \frac{f\,g + g^2 - f\,g}{g-f} \to \text{min}$$

$$\frac{d}{dg}\frac{g^2}{g-f} = 0 = \frac{2g(g-f) - g^2}{(g-f)^2}$$

$$g^2 - 2gf = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 2f\,,\; b = 2f$$

$$s = 4f = 20\text{cm}$$

4. Linse

Der Lichtfleck am Schirm hat den selben Durchmesser wie die Linse. Das kann bei zwei Konfigurationen entstehen:

(i) Der Strahl zwischen Linse und Schirm ist kollimiert. Dann befindet sich die Lichtquelle im Fokus der Linse, also b = 12 cm vor der Linse.

(ii) Der Strahl zwischen Linse und Schirm hat einen Zwischenfokus. Da die Durchmesser an der Linse und am Schirm gleich sind, befindet sich der Zwischenfokus in der Mitte bei b = 15 cm. Das ergibt bei einer Brennweite f = 12 cm eine Bildweite b = 60 cm

Da der Raumwinkel, unter dem die Linse getroffen wird, im ersten Fall grösser ist, ist in diesem Fall (Quelle im Brennpunkt, Strahl nach Linse kollimiert) der Fleck auch heller.

5. Brechungsgesetz

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die beiden festen Punkte beide den gleichen Abstand *d* von der Grenzfläche haben. Ihr Abstand in Richtung der Grenzfläche sei *x*, was sich als $x = x_1 + x_2$ aus den beiden Abständen zu dem (vorläufig frei wählbaren) Punkt ergibt, an dem der Strahl die Grenzfläche trifft. Der gesamte optische Weg ist dann $L_{opt} = n_1\sqrt{x_1^2 + d^2} + n_2\sqrt{(x - x_1)^2 + d^2}$.
Da diese Grösse minimal werden muss, verlangen wir
$0 = \frac{dL_{opt}}{dx_1} = \frac{n_1 x_1}{\sqrt{x_1^2 + d^2}} - \frac{n_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 + d^2}}$. Daraus ergibt sich sofort das Brechungsgesetz, indem man berücksichtigt, dass z. B. $\sin\theta_1 = x_1 / \sqrt{x_1^2 + d^2}$, wobei wie üblich gegen das Lot gemessen wird.

b) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Brechungsgesetz: Für die Schicht Nr. *j* haben wir $n_j \sin\theta_j = n_{j-1}\sin\theta_{j-1} = ... = n_0 \sin\theta_0$.

6. Brechung bei inhomogenem Brechungsindex

Meinung b) ist richtig. In der Tat sind die Wellenfronten nach Durchlaufen des Plättchens gekrümmt, und die Energie fließt senkrecht zu den Wellenfronten, also zur Symmetrieachse hin. Das Plättchen wirkt als eine Linse ("gradient index lense"), ohne gekrümmt zu sein. Der radial variierende Brechungsindex kann durch eine inhomogene Dotierung des Glases erreicht werden. Mit Hilfe des Fermatschen Prinzips lässt sich leicht verstehen, warum ein einfallender Strahl gebeugt wird: Der optische Weg zwischen zwei Punkten auf verschiedenen Seiten des Plättchens wird minimal, wenn nicht die direkte Verbindung gewählt wird, sondern ein Weg weiter "aussen", wo die Phasenverschiebung durch das Plättchen kleiner ist.

Meinung a) ist falsch, weil das Brechungsgesetz nur für den Übergang zwischen homogenen Materialien gilt. Bei seiner Herleitung wird mit ebenen Wellen gerechnet, die in diesem Fall aber nicht mehr Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind. Mit geometrischen Strahlen zu argumentieren, die keine transversale Ausdehnung haben ("Aber der Strahl sieht doch nur das Medium an einer Stelle!"), kann offensichtlich in die Irre führen.

Wir sehen also, dass die Funktion einer Linse (oder eines anderen fokussierenden oder defokussierenden optischen Elements) allgemein darin besteht, dass einem Strahl radial unterschiedliche Phasenverschiebungen aufgeprägt werden. Diese können sowohl durch eine variable Dicke als auch durch einen inhomogenen Brechungsindex erzeugt werden.

Übungsblatt 9 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 27.04.2004 Abgabe bis 08.06.2004 Rückgabe: 15.06.2004

1. Auflösungsvermögen des Auges

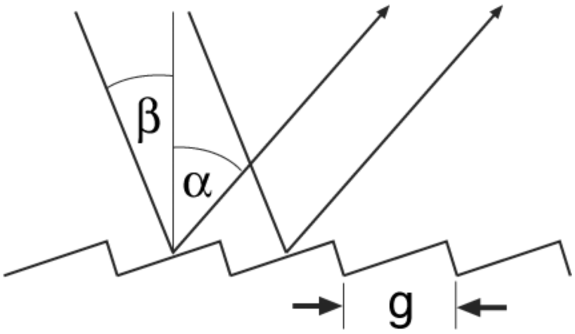
Man kann die Formeln, die zur Beschreibung von Beugungsphänomenen an der kreisförmigen Blende hergeleitet wurden, benutzen, um das Auflösungsvermögen optischer "Instrumente" abzuschätzen. Ein einfaches Beispiel ist das Auge. Die Rolle der Blende wird dabei durch die Pupille eingenommen. Das korrespondierende Beugungsmuster im Fernfeld begrenzt das Auflösungsvermögen des Auges. Wir nehmen einmal an, dass zwei Objekte gerade dann noch getrennt wahrgenommen werden können, wenn sie einen Öffnungswinkel haben, sodass das Beugungsmaximum des zweiten Objekts auf das erste Beugungsminimum des ersten Objektes fällt. Nimm im Folgenden eine Wellenlänge von 550 nm an (maximale Empfindlichkeit des Auges).

a) In welchem Abstand kann das Auge zwei Autoscheinwerfer (Abstand 1 m) noch als getrennt wahrnehmen? Nehmen Sie einen Pupillendurchmesser von 2 mm an.

b) Von allen "punktförmigen" Objekten am Nachthimmel hat man bei der Venus (Durchmesser 13'000 km, Abstand zur Erde ungefähr $150\cdot10^9$ m) noch am ehesten den Eindruck, dass sie "flächig" ist. Kann man die reale Grösse der Venus mit blossem Auge überhaupt sehen?

2. Beugung am Gitter

Mit einem Reflexionsgitter mit 400 Strichen/mm sollen die beiden Natrium-D-Linien aufgelöst werden (λ_1 = 589.5930 nm und λ_2 = 588.9963 nm).



a) Leite zunächst anhand obiger Skizze die Bedingung

$$g\left[\sin(\alpha_m) - \sin(\beta)\right] = m\lambda$$

für das Beugungsmaximum m–ter Ordnung eines Reflexionsgitters mit Gitterkonstante g her, wenn es unter dem Einfallswinkel β beleuchtet wird.

b) Unter welchem Winkel tritt jeweils für die beiden Wellenlängen das erste Beugungsmaximum (m = ± 1) auf, wenn der Einfallswinkel β = 45° beträgt?

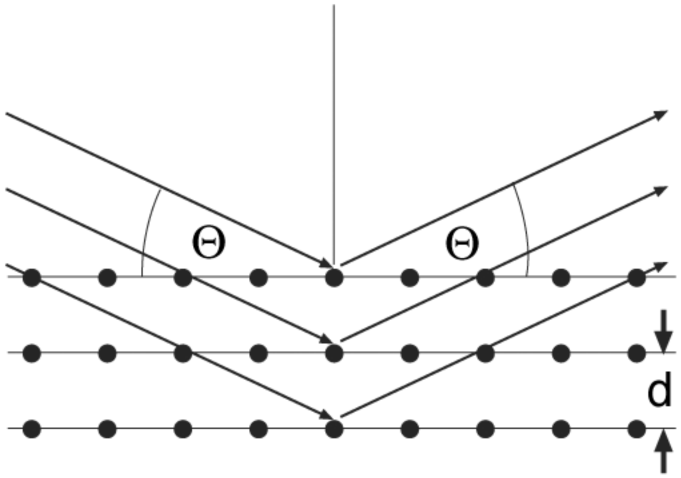
c) Wie viele Striche des Gitters muss man mindestens ausleuchten, damit in der ersten Beugungsordnung die beiden Wellenlängen als getrennte Linien wahrgenommen werden können?

3. Röntgenbeugung an Kristallgittern

Kristallgitter kann man als dreidimensionale Beugungsgitter für Röntgenstrahlen verwenden. Die *Braggsche Bedingung*

$$2d \sin\theta = m\,\lambda$$

erlaubt eine einfache Interpretation der Beugung von Röntgenstrahlen der Wellenlänge λ als Reflexion an “Gitternetzebenen“ des Kristalls, welche den Abstand d zueinander haben.



a) Leite die Braggsche Bedingung anhand der Skizze her.

b) Röntenbeugung wird in der Halbleiterindustrie zur Untersuchung das Qualität von Halbleiterkristallen angewandt. Kommerzielle Geräte für diesen Zweck verwenden typischerweise Röntgenstrahlen der Wellenlänge λ = 1.54 Å (Kupfer K_α–Linie). Bei einem GaAs Wafer tritt dann der Reflex der Ordnung m = 4 unter einem Winkel von 33.03° auf. Welchen Abstand haben die Gitternetzebenen im GaAs Kristall, welche diesen Reflex erzeugen?

(1 Å = 10^{-10} m)

Musterlösung 9 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 08.06.2004

1. Auflösungsvermögen des Auges

a) Die beiden Scheinwerfer lassen sich gerade noch getrennt wahrnehmen, wenn der Betrachtungswinkel $\theta_{\text{Auto}} \approx x / d$ gleich dem Öffnungswinkel für die erste Nullintensität $\theta \cong 1.22 \dfrac{\lambda}{D}$ ist.
Damit ergibt sich für die maximale Entfernung zum Auto

$$d = \frac{Dx}{1.22\,\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1\text{m}^2}{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}\text{m}} = 3.0\,\text{km}.$$

b) Der Betrachtungswinkel $\theta_{\text{Venus}} \cong x / d = 86\ \mu\text{rad}$ ist deutlich kleiner als der Öffnungswinkel für die erste Nullintensitätslinie von $\theta \cong 1.22 \dfrac{\lambda}{D} \approx 335\ \mu\text{rad}$. Das Auge ist daher nicht in der Lage, die Struktur der Venus aufzulösen.

2. Beugung am Gitter

a) Wir nehmen ebene Wellen an. Konstruktive Interferenz gibt es, wenn der Wegunterschied einer einfallenden Wellenfront zur gebeugten Wellenfront zwischen zwei Teilstrahlen mit Abstand g am Gitter gleich $m\,\lambda$ ist. $m \in N$.
In der Skizze im Angabenblatt ist der Weg des rechten einfallenden Teilstrahls um $g\sin\beta$ länger als der linke. Für die gebeugten Teilstrahlen gilt, dass der linke Teilstrahl einen um $g\sin\alpha$ längern Weg hat. Somit ist die gesamte Wegdifferenz:

$$g\left[\sin\beta - \sin\alpha\right] = m\lambda$$

b) $\alpha = \operatorname{asin}(\sin\beta + \dfrac{m\lambda}{g}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{+1}(\lambda_1) = 70.552°\ ,\ \alpha_{+1}(\lambda_2) = 70.511°$

$$\alpha_{-1}(\lambda_1) = 28.117°\ ,\ \alpha_{-1}(\lambda_2) = 28.132°$$

c) Das Auflösungsvermögen eines Gitters mit p Strichen beträgt in der Beugungsordnung m: $\dfrac{\lambda}{d\lambda} = mp$, und somit erhält man bei $m = 1$ als minimale Strichzahl: $p_{\min} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 988$

3. Röntgenbeugung an Kristallgittern

a) Analog zu Aufgabe 2a: Der Wegunterschied des unteren Teilstrahles ist sowohl im einfallenden, als auch im gebeugten Teil um $d\sin\Theta$ länger und somit gilt:

b) Mit $m = 4$, $\lambda = 1.54$ Å und $\theta = 33.03°$ erhält man:

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\Theta} = 5.65\ \text{Å}.$$

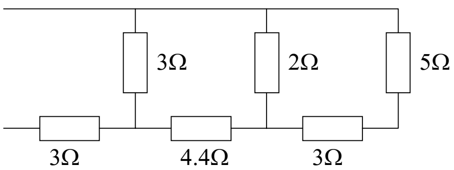
Übungsblatt 10 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

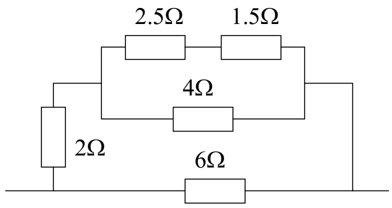
Verteilung 03.06.2004 Abgabe bis 15.06.2004 Rückgabe: 29.06.2004

1. Ohm'scher Widerstand / Kirchhoff'sch Regeln

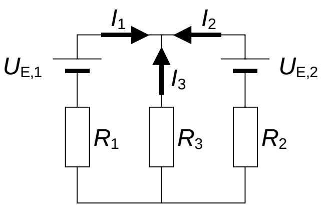
a) Zwei feste Punkte A und B sind durch zwei Drähte von veränderlicher Länge l_1 und l_2 verbunden, wobei aber die Gesamtlänge l = 1000 m festliegt. Wie muss die Gesamtlänge l zwischen A und B verteilt werden, damit der Gesamtwiderstand möglichst gross wird?

b) Berechne den Ersatzwiderstand folgender Widerstandskombinationen.
Bem.: Der Ersatzwiderstand ist jener Widerstand, den man äquivalent anstelle der Widerstandskombination verwenden kann.



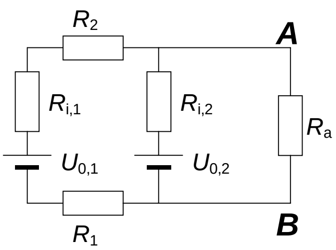


c) Ermittle für die folgende Anordnung die Teilströme I_1, I_2 und I_3 nach den Kirchhoff'schen Regeln: $U_{E,1}$ = 15 V, $U_{E,2}$ = 5 V, R_1 = 50 Ω, R_2 = 54 Ω, R_3 = 25 Ω.



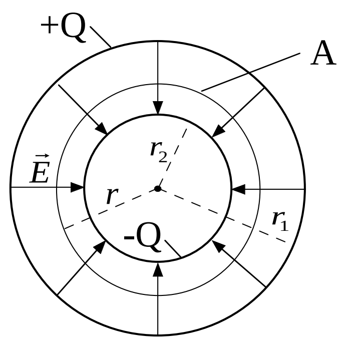
d) Berechne für folgende Anordnung die Spannung und den Strom zwischen den Punkten A und B in Abhängigkeit vom Lastwiderstand R_a.
Wie gross ist im Leerlauffall ($R_a = \infty$) die Spannung von A nach B?
Wie gross ist im Kurzschlussfall (R_a = 0) der Strom von A nach B?

$U_{0,1}$ = 10 V, $U_{0,2}$ = 8 V, $R_{i,1}$ = 1 Ω, $R_{i,2}$ = 2 Ω, R_1 = 5 Ω, R_2 = 4 Ω,



2. Kapazität verschiedener Kondensatoranordnungen

Berechnen Sie die Kapazität $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ des Kugelkondensators direkt aus den Maxwellgleichungen. Dieser Kondensator besteht allgemein aus 2 konzentrischen Kugelschalen (siehe Skizze), wobei auf der äusseren Schale mit Radius r_1 eine Ladung $+Q$ und auf der inneren mit Radius r_2 eine Ladung $-Q$ aufgebracht sei.



a) Integrieren Sie zunächst $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ über das von der Kugelschale A eingeschlossene Volumen. Eines der Integrale überführen wir mithilfe des Gaußschen Integralsatzes $\int_V \operatorname{div}\vec{X}\,dV = \oint_A \vec{X}\,d\vec{A}$ in ein Oberflächenintegral, das andere können wir leicht mit der in A eingeschlossenen Ladung identifizieren. Wir wählen nun Kugelkoordinaten und betrachten explizit die r-Abhängigkeit des elektrischen Feldes. Wie sieht $d\vec{A}$ in Kugelkoordinaten aus, und in welche Richtung zeigt dieser Vektor bei Integration über eine Kugeloberfläche? Für welchen Wertebereich von r ergeben sich nun von 0 abweichende Werte für das Gaußsche Integral?

b) Mit a) haben wir nun einen Ausdruck für die r-Abhängigkeit des elektrischen Feldes gewonnen. Durch Benutzung der Definition des Potentials $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ können wir nun die Spannung $U = \Delta\varphi$ zwischen den beiden Kondensatorschalen erhalten, womit wir leicht die Kapazität ausrechnen können.

c) Was ergibt sich, wenn $r_1 \to \infty$? Das ist die Kapazität eines Kugelkondensators, wie er häufig in Vorlesungsdemonstrationsversuchen eingesetzt wird.

d) Wie gross ist die Kapazität eines Kugelkondensators aus c) mit r_2 = 20 cm?

e) Was ändert sich, wenn wir von Kugel- in Zylinderkoordinaten überwechseln? Berechnen Sie analog die Kapazität des Zylinderkondensators.

Musterlösung 10 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 15.06.2004

1. Ohm'scher Widerstand / Kirchhoff'sch Regeln

a) $l = l_1 + l_2 = \text{const} \quad , \quad R_i = \frac{\rho}{A} l_i$

$$R_{II} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho}{A} \cdot \frac{l_1 \cdot (l - l_1)}{l_1 + l_2} = \frac{\rho}{A\,l} l_1 (l - l_1)$$

$$\text{min:} \frac{dR_{II}}{dl_1} = 0 = \frac{\rho}{A\,l}(l - 2l_1)$$

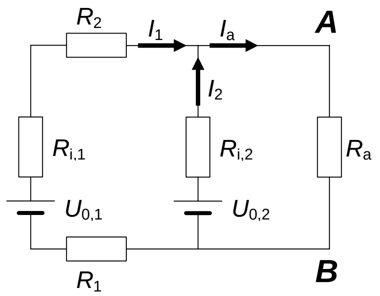
$$l_1 = l/2 = 500\,\text{m}$$

b) Links: $R = 5\ \Omega$ Rechts: $R = 2.4\ \Omega$

c) Knoten: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
Masche links: $-U_{E,1} + I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$
Masche rechts: $I_3 R_3 + U_{E,2} - I_2 R_2 - = 0$

$I_1 = 0.2$ A , $I_2 = 0$ A , $I_3 = -0.2$ A

d)



Knoten: $I_1 + I_2 - I_a = 0$
Masche links: $U_{0,1} - I_1(R_{i,1} + R_1 + R_2) + I_2 R_{i,2} - U_{0,2} = 0$
Masche rechts: $U_{0,2} - I_2 R_{i,2} - I_a R_a = 0$

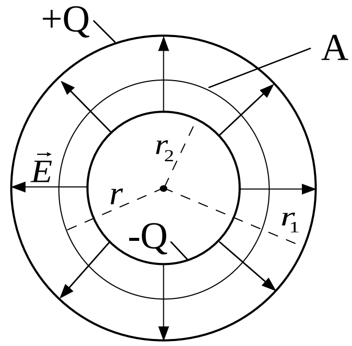
$$I_a = \frac{R_{i,2} U_1 + (R_1 + R_2 + R_{i,1}) U_2}{(R_1 + R_2 + R_{i,1}) R_{i,2} + (R_1 + R_2 + R_{i,1} + R_{i,2}) R_a}$$

$$U_a = I_a R_a$$

$$I_a = \frac{25}{5 + 3R_a} \qquad U_a = \frac{25}{3 + 5/R_a}$$

Leerlauf: $U_a = 8.33\,\text{V} \quad (I_a = 0)$
Kurzschluss: $I_a = 5\,\text{A} \quad (U_a = 0)$

2. Kapazität verschiedener Kondensatoranordnungen



a) $\int_V \mathrm{div}\vec{E}\,dV - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho = 0 \Rightarrow \int_V \mathrm{div}\vec{E}\,dV = q/\varepsilon_0$.

Der Gaußsche Integralsatz ermöglicht nun den Übergang vom Volumen- zum Oberflächenintegral und lautet allgemein: $\int_V \mathrm{div}\vec{X}\,dV = \oint_A \vec{X}\,d\vec{A}$. Zusammen erhält man $\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = q/\varepsilon_0$, wobei q per Definition die in A eingeschlossene Ladung $-Q$ ist.

Das Innere der Kugel ($r < r_2$) ist feldfrei. Integration über eine Kugelschale A mit Radius r ergibt $\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = 0$, entsprechend ist $\vec{E} = 0$ für $r < r_2$. Das gleiche Argument gilt für $r > r_1$, weil die eingeschlossene Gesamtladung $Q - Q = 0$ ist. Also ist nur das Gebiet $r_2 < r < r_1$ felderfüllt. Aus der Symmetrie des Problems ist ebenfalls klar, dass das E-Feld nur von r ahhängen wird. Es gilt nun in Kugelkoordinaten $\oint_A \vec{E}\,d\vec{A} = \oint_A E_r(r)\sin\upsilon\, r\,d\varphi\, r\,d\upsilon = 2\cdot 2\pi\, r^2 E_r(r) = 4\pi r^2 E_r(r)$.

Insbesondere ist $d\vec{A} = \vec{e}_r \sin\upsilon\; r\; d\varphi\; r\; d\vartheta$, zeigt also in $\vec{r}$-Richtung (radial).

Aus all diesem folgt: $4\pi r^2 E_r(r) = -Q/\varepsilon_0 \Rightarrow E_r(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

b) Da $E(r) = -\mathrm{grad}\,\varphi(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$ folgt $\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B E(r)\,dr$.

Somit ergibt sich die Spannung U zwischen den beiden Kugelschalen zu $U = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_1}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$.

Daraus folgt die Kapazität $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$.

c) $r_1 \to \infty$. Dann ist $U = Q/4\pi\varepsilon_0 r_2 \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 r_2$.

d) Für $r_2 = 0.2$ m ergibt sich $C = 4\cdot 3.1415\cdot 8.859\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}\cdot 0.2\,\mathrm{m} = 22.3\,\mathrm{pF}$.

e) Rechnung analog zu a) bis c) in Zylinderkoordinaten ergibt:

$$\oint_A \vec{E}\,d\vec{A} = \oint_A E_r(r)\; r\,d\varphi\; dz = 2\pi\cdot rh\; E_r(r).$$

$$\Rightarrow 2\pi rh\,E_r(r) = -Q/\varepsilon_0 \Rightarrow E_r(r) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$

$$U = -\int_{r_2}^{r_1} E_r dr = -\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{r_2}^{r_1} r^{-1}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\,\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

$$\underline{C = 2\pi\varepsilon_0 h\frac{1}{\ln{r_1}/{r_2}}}$$

Übungsblatt 11 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 10.06.2004 Abgabe bis 17.06.2004 Rückgabe: 29.06.2004

1. Seifenblase

Eine Seifenblase mit Radius r_1 = 2 cm ist auf ein Potential von φ_1 = 1'000 V aufgeladen. Durch Zerplatzen bildet sich ein kugelförmiger Wassertropfen von Radius r_2 = 0.05 cm. Wie gross ist das elektrische Potential dieses Tropfens?

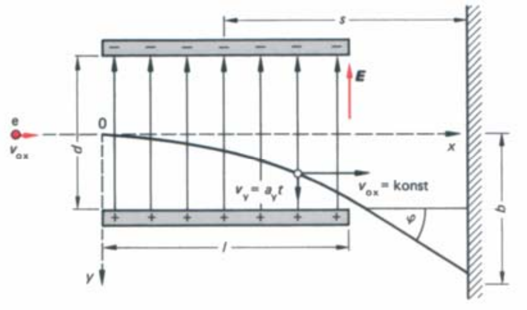
2. Plattenkondensator

Gegeben sei ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator mit Plattenabstand d. Die Platte bei $x = 0$ sei negativ und die Platte bei $x = d$ positiv mit einer Flächenladungsdichte σ geladen.

Berechne das Feld $E(x)$, das Potential $\varphi(x)$, sowie die Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ zwischen der Platte bei $x = d$ und der bei $x = 0$.

Welche Arbeit W_{0x} leistet das elektrische Feld, wenn ein Elektron von $x = 0$ nach $x = d$ bewegt wird?
Gib das elektrische Feld und die Arbeit für $\sigma = 10^{-9}$ As/m^2 und d = 1 mm sowohl in Joule (J) als auch in Elektronenvolt (eV) an.

3. Braunsche Röhre



Ein Elektron wird zwischen zwei Beschleunigungselektroden (U_a = 1 kV) auf eine horizontale Geschwindigkeit v_{ox} beschleunigt und durchfliegt dann mittig ein homogenes elekrisches Querfeld. Die beiden Ablenkplatten haben einen Abstand von 2 mm und eine Länge l = 1 cm. Im Abstand von s = 50 cm ist ein Fluoreszenzschirm, mit dem man das eintreffende Elektron beobachten kann (sofern man sehr, sehr gute Augen hat, oder mehr als ein Elektron ankommt).

a) in welchem Abstand b von der Achse trifft das Elektron den Schirm, wenn die Ablenkspannung auf den Platten U_{Kond} = 15 V beträgt?

b) Ab welcher Ablenkspannung U_{Kond} trifft das Elektron nicht mehr auf den Schirm, da es vorher auf die Ablenkplatte trifft?

c) Da das Elektron aufgrund seiner (kleinen) Masse der Schwerkraft unterliegt, wird es zusätzlich nach unten beschleunigt. Welche Spannung muss an den Platten anliegen, damit die Schwerkraft gerade kompensiert wird?

4. Kreisschleife

Ein dünner Metalldraht der Länge l = 5 m ist zu einem Kreis gebogen. Auf ihm befindet sich – gleichmässig verteilt – die Ladung $Q_1 = +5\cdot10^{-6}$ As. Wie gross ist die Kraft, die die Ladung Q_1 auf eine punktförmige Ladung $Q_2 = -3\cdot10^{-5}$ As ausübt, wenn sich diese auf der Kreisachse in einem Abstand a = 1 m von der Keisebene befindet? Wird die Ladung Q_2 bei a = 1 m aus der Ruhelage losgelassen, wird sie zum Kreismittelpunkt hin beschleunigt. Die Masse von Q_2 sei m_2 = 1 g. Welche Geschwindigkeit v hat die Ladung Q_2 beim Durchgang durch die Kreisebene?

Hinweis: Berechne das Potential der Kreisschleife und verwende dann den Energiesatz, um v zu berechnen.
Evtl. brauchst Du das Integral $\int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Musterlösung 11 zur Physik I, D-ITET / D-MATL

Verteilung 18.06.2004

1. Seifenblase

Das Potentialfeld einer homogen geladenen Kugelschale mit Radius R ist für $r>R$ das selbe wie das einer Punktladung. (Siehe Übung 10). Es ist gegeben durch:

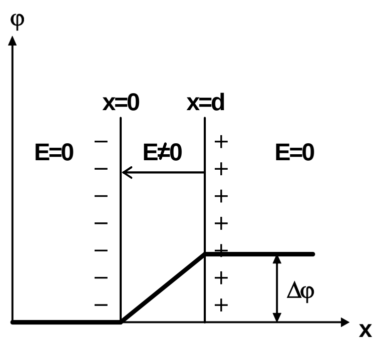
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \text{const}.$$

Die Seifenblase ist (relativ zu einem weit entfernten Bezugspunkt, z.B. Erde) auf 1'000 V aufgeladen. Somit können wir $\varphi(\infty) = 0$ setzen.
Nach dem Zerplatzen der Seifenblase bleibt die Ladung erhalten, das Potential ändert sich dabei von $\varphi_1 = \varphi(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1} \rightarrow \varphi_2 = \varphi(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2}$.

Somit gilt: $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1}$ und $\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_1 = \frac{2\text{ cm}}{0.05\text{ cm}} 1000\text{ V} = 40\text{ kV}$

Bemerkung1: Die Ladung der Seifenblase ist offensichtlich positiv.
Bemerkung2: Da das Potential für die Ladungen auf dem Wassertropfen grösser geworden ist, musste Arbeit geleistet werden. Die Energie dazu stammt von der, in der Oberflächenspannung der Seifenblase gespeicherten Energie.

2. Plattenkondensator



Aus Symmetriegründen ist $\vec{E}$ parallel zur x-Achse und nur von x abhängig (und nicht von y oder z).
Aus $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ folgt für $0 < x < d$: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{dE(x)}{dx} = 0$
und damit $E(x) = \text{const}$ für $0 < x < d$.
Nach dem Gauss'schen Satz gilt $\oint \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$.

Wählt man beispielsweise als geschlossene Fläche einen Würfel mit Kantenlänge a, sodass die Ebene $x = 0$ den Würfel in zwei gleiche Hälften teilt, ergibt nur eine Seitenfläche einen Beitrag zu $\oint \vec{E}\,d\vec{A} = -E\,a^2$. Die eingeschlossene Ladung ist dabei σa^2 und damit $E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Analog folgt für $x < 0$ und $x > d$: $E(x) = 0$.

Aus $\varphi(x) = -\int_0^x \vec{E}(x)\,d\vec{x} + \varphi(0)$ folgt mit $\varphi(0) = 0$: $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\sigma x}{\varepsilon_0} & 0 \le x \le d \\ \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} & x \ge d \end{cases}$.

„sanity check“: $E = -grad\varphi = -\frac{d}{dx}\varphi(x) = -\frac{d}{dx}\frac{\sigma x}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ o.k.

Und damit $\Delta\varphi = \varphi(d) - \varphi(0) = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$.

$$W_{0d} = \int_0^d F(x)\,dx = q\,E(d-0) = -e\,E\,d = -\frac{e\,\sigma\,d}{\varepsilon_0} \quad \text{oder} \quad W_{0d} = q\,\Delta\varphi = -e\frac{\sigma\,d}{\varepsilon_0}$$

W_{0d} = -1.81·10^{-20} J = -0.113 eV .

3. Braunsche Röhre

a) Herleitung analog „Hering, Martin, Stohrer“.

Wir erhalten für den Ablenkwinkel φ: $\tan\varphi = \dfrac{l\,U_{Kond}}{2\,d\,U_a}$ und damit

$$b = s\tan\varphi = \frac{s\,l\,U_{Kond}}{2\,d\,U_a} = 1.88\,\text{cm.}$$

b) Siehe „Hering, Martin, Stohrer“:

$y = \dfrac{U_{Kond}}{4d\,U_a}x^2$ mit $y = d/2$ und $x = l$ erhalten wir:

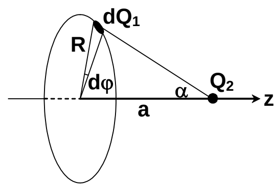
$$U_{Kond} = \frac{4d\,U_a(d/2)}{l^2} = \frac{2d^2U_a}{l^2} = 80\,\text{V}$$

c) Schwerkraft = elektrische Anziehungskraft:

$$m\,g = E\,e \quad \rightarrow \quad m\,g = \frac{U_{Kond}}{d}e \quad \rightarrow \quad U_{Kond} = \frac{m\,g\,d}{e} = 0.11\,\text{pV}$$

Die Schwerkraft spielt für die Braunsche Röhre also keine Rolle.

4. Kreisschleife



Aus Symmetriegründen kann es nur eine Kraft entlang der Achse geben. Ein differentielles Ladungselement dQ_1 auf der Leiterschleife mit dem Winkel $d\varphi$ beträgt $dQ_1 = \frac{Q_1}{2\pi}d\varphi$. Die Kraft die von dQ_1 auf Q_2 wirkt, ist dann

$dF = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1Q_2}{R^2+a^2}\dfrac{d\varphi}{2\pi}$ mit $R = \dfrac{l}{2\pi}$. Die Komponente in z-Richtung ist gegeben durch

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2+a^2}\frac{d\varphi}{2\pi}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\frac{d\varphi}{2\pi}$$

Die radialen Komponenten $dF_r = dF\sin\alpha$ heben sich aus Symmetriegründen auf.

Die Gesamtkraft F ergibt sich dann zu $F = \displaystyle\int_0^{2\pi} dF_z = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{\left(R^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -0.65\,\text{N}$.

Das Potential $\varphi(z)$ ergibt sich mit $\varphi(0) = 0$ zu

$$\varphi(z) = -\int_0^z E(z)dz = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^z \frac{z'}{\left(R^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}dz' = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}\right|_0^z = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{R}\right)$$

Aus dem Energiesatz folgt: $\dfrac{mv^2}{2} = Q_2\varphi(a)$ und damit $v = \sqrt{\dfrac{2Q_2\varphi(a)}{m}} = 35.8\,\text{m/s}$.