Runde 7, Beispiel 49

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06.12.2006

1 Angabe

Man bestimme alle reellen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen des linearen Eigenwertproblems

$$y'' - \lambda^2 y = 0 \qquad y(1) = y(-1); y'(1) = y'(-1)$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineares Eigenwertproblem

Spezielle Randwertprobleme, die von einem Parameter λ abhängen. Betrachte vollhomogenes lineares RWP. Die Existenz von nichttrivialer Lösung $y(x) = 0$ hängt von der Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\lambda \in \mathbb{R}$) ab.
Definition: Jeder Wert λ, für den das vollhomogene RWP nichttriviale Lösungen besitzt, heißt Eigenwert. Die zugehörigen nichtrivialen Lösungen $y(x)$ heißen Eigenfunktionen zum Eigenwert λ.
Anmerkung: Aus dem Alternativsatz folgt: det $D = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert.

3 Lösung des Beispiels

$$y'' - \lambda^2 \cdot y, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösen charakteristisches Polynom und bilden Fundamentalmatrix Φ:

$$\alpha^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\lambda$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x & e^{-\lambda \cdot x} \\ \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} & -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen, in Anlehnung an die Ausführungen zum Alternativsatz, die Determinante von $D = R \cdot \Phi(1) + S \cdot \Phi(-1)$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & e^{-\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & e^{\lambda} \\ \lambda \cdot e^{-\lambda} & -\lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & e^{-\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & -e^{\lambda} \\ -\lambda \cdot e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & e^{-\lambda} - e^{\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\det D = 2 \cdot \lambda \cdot (-e^{-\lambda} + e^{\lambda})^2 = 0$$

Wenn $\lambda = 0$ ist, existiert triviale Lösung. Wir berechnen nun c_1 und c_2:

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$
$$y = \lambda \cdot c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} - \lambda \dot{c}_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$
$$\lambda = 0 \ \Rightarrow y = c_1 + c_2, \ y' = 0$$
$$y(1) = y(-1): \ c_1 + c_2 = c_1 + c_2$$

y' braucht nicht mehr betrachtet zu werden. c_1 und c_2 können beliebig gewählt werden.