252–261) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

258) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+3}{2x^2+3x+2}\,dx$

Nenner abgeleitet $= 4x+3$

Idee: Teilen von $x+3$ sodass $4x+3$ vorkommt

Partialbruchzerlegung nicht möglich weil keine Nullstellen im Nenner

$(x+3) = \frac{1}{4}(4x+3) + \frac{9}{4}$

$$\frac{1}{4}\cdot\int\frac{4x+3}{2x^2+3x+2}\,dx + \frac{9}{4}\cdot\int\frac{1}{2x^2+3x+2}\,dx$$

Integration durch Substituition: $u = 2x^2+3x+2$

$dx = \frac{1}{4x+3}\,du$

$$\int\frac{1}{u}\,du = \ln(2x^2+3x+2)$$

Idee: auf $\frac{1}{x^2+1}$ bringen

$$\int\frac{1}{2x^2+3x+2}\,dx$$ Nenner als Quadrat ausgedrückt

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$= \int\frac{1}{\left(\sqrt{2}x+\frac{3}{\sqrt{2}2}\right)^2+\frac{7}{8}}\,dx$$

Integration durch Substituition $u = \frac{4x+3}{\sqrt{7}}$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4}\,du$

$u^2 = \frac{16x^2+24x+9}{7}$

$\Rightarrow u^2\cdot\frac{7}{8}+\frac{7}{8} = 2x^2+3x+2$

$$= \int\frac{1}{\frac{u^2\cdot 7+7}{8}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\,du$$

$$= \int\frac{2\cdot\sqrt{7}}{u^2\cdot 7+7}\,du = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{2\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}$$

Zusammen: $$\Rightarrow \left.\frac{\ln(2x^2+3x+2)}{4} + \frac{9\cdot\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)}{2\sqrt{7}}\right|_0^\infty$$

$\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$

$\arctan: \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow$ divergent

Fettucine Mario