Table of Contents

Um auf die Lösungen der Prüfungsaufgaben oder der Übungsblätter zuzugreifen, wenden Sie sich an die folgende E-Mail-Adresse:

mathe.tutor@yahoo.com

Aufgabe 1 12P ✓

(a) Gegeben sei die Menge $(\mathbb{Z},\oplus)$ der ganzen Zahlen, wobei die Verknüpfung $\oplus$ definiert ist:

$$a \oplus b \coloneqq a + b - 8$$

Überprüfen Sie das Assoziativgesetz.

(b) Wir betrachten die 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, wobei $+$ die Addition der Matrizen und $\cdot$ die Multiplikation der Matrizen bezeichnet. Beweisen Sie eines der beiden Distributivgesetze in $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Hinweis: Repräsentieren Sie allgemein die Matrizen als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 12P ✓

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ -2 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Ermitteln Sie A^{-1}.

(b) Beschreiben Sie die Menge der x und y, für die A invertierbar ist.

Aufgabe 3 12P ✓

Gegeben sei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2v & v & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $v \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von v gilt $|A| = |A^{-1}|$?

Aufgabe 4 12P ✓ echt bisschen heiter

Gegeben seien zwei Mengen M und N. Beweisen Sie ausführlich die folgenden Rechenregeln.

Anmerkung: Achten Sie darauf, jeden einzelnen logischen Beweisschritt genau zu erklären. Graphische Lösungswege (z.B. Venn-Diagramme) sind als Lösung **nicht** ausreichend!

(a) $M \subset N \Rightarrow \overline{N} \subset \overline{M}$

(b) $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

Aufgabe 5 12P

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$.

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Werte von t sind die drei Vektoren linear unabhängig? (6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von den drei Vektoren erzeugten Untervektorraums U_t von $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von Parameter t. (6 Punkte)

Aufgabe 6 6P

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Die Matrix A muss regulär sein, damit das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist. (2 Punkte)

(b) Hat der Kern einer linearen Abbildung die Dimension 1, so hat das entsprechende homogene Gleichungssystem genau eine Lösung. (2 Punkte)

(c) Es gibt zwei Matrizen, A, B, für die gilt: $A \cdot B = B \cdot A$. (2 Punkte)

Aufgabe 7 12P

(a) Polynomdivision: Berechnen Sie die Polynomdivision und führen Sie eine Probe durch. (6 Punkte)

$$(2x^3 - 9x^2 + 15) : (2x - 5)$$

(b) Woraus besteht ein kommutativer Ring? Beschreiben Sie die Eigenschaften eines kommutativen Rings auch formal.

Aufgabe 8 12P

Gegeben sei folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1909 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von C. Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit es ohne Taschenrechner möglich ist.

Aufgabe 9 12P

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ -2 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) Ermitteln Sie A^{-1}. (10 Punkte)

(d) Ist A für alle a und b invertierbar? Falls nein, für welche a, b ist A *nicht* invertierbar? (2 Punkte)

Aufgabe 10 6P

Es sei $\mathbb{Z}^- := \{-1, -2, -3 \ldots\}$. Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft an, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass alle Eigenschaften gelten.

(a) $(\mathbb{Z}^- \cup \{0\}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition von ganzen Zahlen bezeichnet. (2 Punkte)

(b) $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet. (2 Punkte)

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$, wobei $a * b = \frac{b}{a}$, wobei $\frac{b}{a}$ die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q} \setminus \{0\} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$. (2 Punkte)

Aufgabe 11 6P

Es sei R die Relation auf der Menge der geordneten Paare von Positiven ganzen Zahlen definiert als $((a, b), (c, d)) \in R$ dann und nur dann, wenn $ad = bc$, wobei es sich um die gewöhnliche Multiplikation der ganzen Zahlen handelt. Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 12 12P

Man untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 13 12P

Ein *Wurzelbaum* $T = (V, E)$ ist ein Baum mit einem gekennzeichneten Knoten $v \in V$, den man als *Wurzel* des Baumes bezeichnet. Sei $u \in V$ ein Knoten. Die Höhe von u ist die maximale Länge eines Pfades in T mit Anfangsknoten u. Die *Höhe* von T ist die Höhe der Wurzel von T. Ein *Blatt* ist ein Knoten vom Grad 1.

Ein *vollständiger* Ternärbaum ist ein Wurzelbaum mit mindestens 4 Knoten, in dem

(a) Jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau drei direkte Nachfolger hat,
(b) Alle Pfade von der Wurzel zu den Blättern die gleiche Länge haben.

Zeigen Sie, dass ein vollständiger Ternärbaum der Höhe h, genau 3^h Blätter hat.

Aufgabe 14 12P

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A \cdot B$.
(b) Welche Eigenschaften gelten in einer Gruppe? Verwenden All – und Existenzquantoren.
(c) Berechnen Sie $(6x^3 - 5x^2 - 22x - 24) : (2x + 3)$
(d)
  1) Eine Matrix ist invertierbar. Können Sie etwas über die Determinante aussagen und wenn ja was?
  2) Eine Gruppe ist kommutativ. Können Sie darüber aussagen, ob sie auch ein Ring ist und wenn ja was?
  3) Eine Abbildung ist injektiv und surjektiv. Können Sie etwas über Bijektivität der Abbildung aussagen und wenn ja was?

Aufgabe 15 12P

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -8 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Begründen Sie, wenn die Matrix invertierbar, bzw. nicht invertierbar ist.

Aufgabe 16   12P

Sei $GF(4)$ der Galois-Körper mit vier Elementen. Die Verknüpfungstabelle für die beiden Operationen $\oplus$ und $\otimes$ lautet:

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

(a) Was ist das neutrale Element der Operation $\oplus$? (Mit Begründung)

(b) Was ist das inverse Element der Operation $\oplus$? (Mit Begründung)

(c) Was ist das neutrale Element der Operation $\otimes$? (Mit Begründung)

(d) Was ist das inverse Element der Operation $\oplus$? (Mit Begründung)

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ vier verschiedene 5×5-Matrizen.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Der Kern von A hat Dimension 2.
Welche Dimension hat der Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = 0$?
Welchen Rang hat die Matrix A?

(b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom $(0-\lambda)^2(\lambda - 1909)(\lambda - 1)(\lambda + 5)$
Welche Eigenwerte hat die Matrix B?
Ist B invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Sei C die Diagonalmatrix mit den Einträgen 1, 2, 3, 4, 5, also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt die Matrix C?

(d) Nehmen Sie an, dass D vollen Rang hat. Ist die Abbildung $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit $f(x) = Dx$ bijektiv? Nennen Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^5$, die $f(x) = 0$ erfüllen!

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Welche Methoden kennen Sie, um die Determinante einer $n \times n$ Matrix, $n \in N$ zu berechnen?

(b) Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrix und erklären Sie davon allgemein den Ablauf der von Ihnen gewählten Methode.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 37\cdot\pi & \sqrt{2} & 0 & 99 & 1 & -189 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Man beweise

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(b) Wann ist ein Graph ein Baum? Geben Sie zumindest zwei äquivalente Definitionen.

(c) Erklären Sie die Eigenschaften „gerichtet“ bzw. „gewichtet“ in einem allgemeinen Graphen.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

1. Es sei $\mathbb{Z}^+ \coloneqq \{1, 2, \ldots\}$. Welche der folgenden Mengen in (a) bis (c) sind Gruppen? Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft an, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass alle Gruppeneigenschaften gelten.
   (a) $(\mathbb{Z}^+, \odot)$, wobei $\odot$ die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet.
   (b) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \otimes)$, mit $a \otimes \mathrm{b} = \mathrm{a} / \mathrm{b}$, wobei / die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q}\backslash\{0\} \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$.
   (c) $(\mathbb{Q}^+, \oplus)$, wobei $\oplus$ die gewöhnliche Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q}^+ \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.
2. Prüfen Sie, ob die folgende Relation Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation ist.

$$R = \{(x, y) \in N^+ \times N^+ \mid 2x \cdot y \leq 2 + 2x + 2y\}$$

Aufgabe 1 12P

(a) Gegeben sei die Menge $(\mathbb{Z},\oplus)$ der ganzen Zahlen, wobei die Verknüpfung $\oplus$ definiert ist:

$$a \oplus b := a + b - 8$$

Überprüfen Sie das Assoziativgesetz.

(b) Wir betrachten die 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, wobei $+$ die Addition der Matrizen und $\cdot$ die Multiplikation der Matrizen bezeichnet. Beweisen Sie eines der beiden Distributivgesetze in $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Hinweis: Repräsentieren Sie allgemein die Matrizen als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

a)
$$\begin{bmatrix} A1) \Rightarrow \text{reflexiv} & R(x,x) \quad x \in \mathbb{Z} \\ A2) \Rightarrow \text{symetrisch} & R(x,y) \wedge R(y,x) \\ A3) \Rightarrow \text{transitiv} & R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(a \oplus b) \oplus c}_{A} = \underbrace{a \oplus (b \oplus c)}_{B}$$

$$(a+b-8) \oplus c$$

$$A = \quad a+b-8+c-8 =$$

$$a \oplus (b+c-8)$$

$$B = \quad a+b+c-8-8$$

$$A = B \checkmark$$

b) Distributiv

$$\underbrace{a \cdot (b+c)}_{A} = (a \cdot b) + (a+c)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+c & b+c \\ b+c & b+c \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a\cdot(b+c) & a\cdot(b+c) \\ a\cdot(b+c) & a\cdot(b+c) \end{matrix}}_{A}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a\cdot b & a\cdot b \\ a\cdot b & a\cdot b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cdot c & a\cdot c \\ a\cdot c & a\cdot c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\cdot b + a\cdot c & a\cdot b + a\cdot c \\ a\cdot b + a\cdot c & a\cdot b + a\cdot c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{matrix} a\cdot(b+c) & a\cdot(b+c) \\ a\cdot(b+c) & a\cdot(b+c) \end{matrix}}_{B}$$

$$A = B$$

Aufgabe 2 12P

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ -2 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Ermitteln Sie A^{-1}.

(b) Beschreiben Sie die Menge der x und y, für die A invertierbar ist.

$A^{-1} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad I + I$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad + II$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -x & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{y} \\ -\frac{2}{x} & -\frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

A^{-1}

$x \neq 0$
$y \neq 0$ $\Rightarrow$ div $/0$ = illegal

Aufgabe 3 12P

Gegeben sei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2v & v & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & 2 \\ 2v & v \\ -6 & -1 \end{matrix}$$

Mit $v \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von v gilt $|A| = |A^{-1}|$?

$-4v \quad -2v \quad +6v \quad -2v$

$-2v = \pm 1 \qquad \underline{v = \pm 0{,}5}$

$|A| = |A^{-1}|$ gilt wenn $\det(A \cdot A^{-1})$

$\downarrow$

$\det(I) = 1$

$\det = \pm 1$

Aufgabe 4 12P

Gegeben seien zwei Mengen M und N. Beweisen Sie ausführlich die folgenden Rechenregeln.

Anmerkung: Achten Sie darauf, jeden einzelnen logischen Beweisschritt genau zu erklären. Graphische Lösungswege (z.B. Venn-Diagramme) sind als Lösung **nicht** ausreichend!

(a) $M \subset N \Rightarrow \bar{N} \subset \bar{M}$

(b) $M \setminus N = M \cap \bar{N}$

a) $\underbrace{M \subset N}_{A} \Rightarrow \underbrace{\bar{N} \subset \bar{M}}_{B}$

$M \subset N$

$x \in M \Rightarrow x \in N$

$x \notin M \not\Rightarrow x \notin N$

$x \notin N \Rightarrow x \notin M$

$x \notin N \not\Rightarrow x \notin M$

$\bar{N} \cap (N \cap \bar{M}) = \bar{M}$

größer Menge $\Rightarrow$ Teilmenge von $\bar{M}$

$\bar{N} \subset \bar{M}$ weil $\Rightarrow$ $\bar{M}$ umfasst auch $(N \cap \bar{M})$ oder rest umfasst gleich den selben Zahlenbereich $\Rightarrow$ Teilmenge ✓

b) $\underbrace{M \setminus N}_{A} = \underbrace{M \cap \overline{N}}_{B}$

$A \subset B \qquad M \setminus N \Rightarrow$

$x \in M$
$x \notin N \Rightarrow x \in \underbrace{M \cap \overline{N}}_{B}$
$\hookrightarrow x \in \overline{N}$

$B \subset A \qquad M \cap \overline{N}$

$x \in M \quad x \notin M$
$x \notin N \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \in M \quad x \in N$
$\hookrightarrow \underbrace{x \in M \setminus N}_{A}$

Aufgabe 5 12P

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit einem Parameter } t \in \mathbb{R}.$$

det ≠ 0

(a) Für welche Werte von t sind die drei Vektoren linear unabhängig? (6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von den drei Vektoren erzeugten Untervektorraums U_t von $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von Parameter t. (6 Punkte)

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & t+1 & t & 2 & t+1 \\ t+2 & t & 1 & t+2 & t \end{array}$$

$$(t+1) + (-1 \cdot t \cdot (t+2)) - (t \cdot 4) - (-1 \cdot 2)$$

$$(t+1) - t^2 - 2t - t^2 + 2$$

$$-2t^2 - t + 3 \,/\, (t-1) = -(2t-3)$$

$$-(-2t+2t)$$

$$+2t-2t$$

$$-3t+3$$

$$\left(-t-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{t = -\tfrac{3}{2} \quad t = 1}$$

↳ wenn $t \neq -\frac{3}{2}$, $\neq 1$

↳ Dim = 3

↳ sonst dim 2 => Rangverlust

↳ ganz genau einfach ausrechnen

Aufgabe 6 6P

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Die Matrix A muss regulär sein, damit das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist. (2 Punkte)

(b) Hat der Kern einer linearen Abbildung die Dimension 1, so hat das entsprechende homogene Gleichungssystem genau eine Lösung. (2 Punkte)

(c) Es gibt zwei Matrizen, A, B, für die gilt: $A \cdot B = B \cdot A$. (2 Punkte)

a) Ja die Aussagen sind äquivalent

b) $\text{Dim}(\text{Ker} A) = \text{Rang } A = 1$ $\Rightarrow$ heißt nicht ein Lösung

c) $A \cdot B = B \cdot A$

↳ Einheitsmatrix

Aufgabe 7 12P

(a) Polynomdivision: Berechnen Sie die Polynomdivision und führen Sie eine Probe durch. (6 Punkte)

$$(2x^3 - 9x^2 + 15) : (2x - 5)$$

(b) Woraus besteht ein kommutativer Ring? Beschreiben Sie die Eigenschaften eines kommutativen Rings auch formal.

$2x^3 - 9x^2 + 15 \;/\; 2x - 5 \;=\; x^2 - 2x + 5$

$-(4x^3 - 5x^2)$

$-4x^2 + 0x$

$-(-2x^2 + 10x)$

$10x + 15$

-10 R

Menge + 2 Verknüpfungen z.B. $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$

↳ kommutative Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$

↳ + $\mathbb{Z}$ ·

↳ assoziativ, distributiv, kommutativ

↳ $a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

↳ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Aufgabe 8 12P

Gegeben sei folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1909 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von C. Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit es ohne Taschenrechner möglich ist.

$\lambda_1 = 1909$

$\underline{(1909-\lambda)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1909-\lambda & 2 & 0 \end{matrix}$$

$(3-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(1909-\lambda) - ((1909-\lambda)\cdot 2)$

$(-3\lambda+\lambda^2)\cdot(1909-\lambda) \quad - 3818 + 2\lambda$

$-5727\lambda + 3\lambda^2 + 1909\lambda^2 - \lambda^3$

$-\lambda^3 + 1912\lambda^2 - 5725\lambda - 3818 \;/ (-\lambda + 1909)$

$+\lambda^3 - 1909\lambda^2$

$3\lambda^2 - 5725\lambda$

$-3\lambda^3 + 5727\lambda$

$+2\lambda - 3813$

$\underline{\underline{(\lambda^2 - 3\lambda - 2)}}$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2$$

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}$$

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

Aufgabe 9 12P

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ -2 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) Ermitteln Sie A^{-1}. (10 Punkte)

(d) Ist A für alle a und b invertierbar? Falls nein, für welche a, b ist A *nicht* invertierbar? (2 Punkte)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc ccc} 1 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} +II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc ccc} 0 & 0 & -a & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 2 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

A^{-1}

$$\boxed{\begin{array}{c} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}}$$

Aufgabe 10 6P

Es sei $\mathbb{Z}^- := \{-1, -2, -3 \dots\}$. Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft an, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass alle Eigenschaften gelten.

(a) $(\mathbb{Z}^- \cup \{0\}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition von ganzen Zahlen bezeichnet. (2 Punkte)

(b) $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet. (2 Punkte)

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$, wobei $a * b = \frac{b}{a}$, wobei $\frac{b}{a}$ die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q} \setminus \{0\} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$. (2 Punkte)

a) $e = 0$

inverses = positiv $\Rightarrow$ nicht element

b) invers = $1 \notin$ Element

c) assoziativ verletzt $a \circ b \neq b \circ a$

Aufgabe 11 6P

Es sei R die Relation auf der Menge der geordneten Paare von Positiven ganzen Zahlen definiert als $((a,b),(c,d)) \in R$ dann und nur dann, wenn $ad = bc$, wobei es sich um die gewöhnliche Multiplikation der ganzen Zahlen handelt. Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

$(a,b)\quad(c,d)$

$ad = bc$

$R(x,x) = (a,b)\,(a,b)$

$a \cdot b = b \cdot a \quad \square$

$R(x,y) = R(y,x)$

$(a,b)\quad(c,d)$

$ad = bc$

$cd \quad ab$

$cb = d \cdot a \quad \square$

transitiv

$R(x,y) \quad R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$

$ab \quad cd \qquad cd \quad ef \qquad ab \quad ef$

$ad = bc$

$cf = de \quad \Rightarrow \quad a \cdot f = b \cdot e$

$a \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{c} f = b \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{d} \cdot e \quad \square$

Aufgabe 12 12P

Man untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.

a) Sarru

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & t & 4 \\ 4 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & t \\ 4 & 11 \end{matrix}$$

$$10t + 48 - 132 + 16t - 44 - 90$$

$$-218 + 26t = 0$$

$$t = 8{,}384\ldots$$

$$\hookrightarrow t \neq \frac{218}{26}$$

Aufgabe 13 12P

Ein *Wurzelbaum* $T = (V, E)$ ist ein Baum mit einem gekennzeichneten Knoten $v \in V$, den man als *Wurzel* des Baumes bezeichnet. Sei $u \in V$ ein Knoten. Die Höhe von u ist die maximale Länge eines Pfades in T mit Anfangsknoten u. Die *Höhe* von T ist die Höhe der Wurzel von T. Ein *Blatt* ist ein Knoten vom Grad 1.

Ein *vollständiger* Ternärbaum ist ein Wurzelbaum mit mindestens 4 Knoten, in dem

(a) Jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau drei direkte Nachfolger hat,
(b) Alle Pfade von der Wurzel zu den Blättern die gleiche Länge haben.

Zeigen Sie, dass ein vollständiger Ternärbaum der Höhe h, genau 3^h Blätter hat.

Aufgabe 14   12P

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A \cdot B$.

(b) Welche Eigenschaften gelten in einer Gruppe? Verwenden All – und Existenzquantoren.

(c) Berechnen Sie $(6x^3 - 5x^2 - 22x - 24) : (2x + 3)$

(d)

1) Eine Matrix ist invertierbar. Können Sie etwas über die Determinante aussagen und wenn ja was?
2) Eine Gruppe ist kommutativ. Können Sie darüber aussagen, ob sie auch ein Ring ist und wenn ja was?
3) Eine Abbildung ist injektiv und surjektiv. Können Sie etwas über Bijektivität der Abbildung aussagen und wenn ja was?

a)

$$\begin{array}{cc|cc} & & 5 & -1 \\ & & -1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{array}$$

b) R1) ist erfüllt $(G, \oplus)$ => kommutative Gruppe

Ring $(G, \oplus, \odot)$

↳ muss gelten assoziativ, distributiv => dann Ring

c) $6x^3 - 5x^2 - 22x - 24 \; / \; 2x+3 \;=\; 3x^2 - 7x - \frac{1}{2}$

$(6x^3 + 9x^2)$

$-6x - 9x^2$

$-14x^2 - 22x$

$+14x^2 + 21x$

$-1x + 24$

$x + \frac{3}{2}$

22,5 R

$(3x^2 - 7x - \frac{1}{2}) \cdot (2x+3) + 22{,}5$

d)

1) Eine Matrix ist invertierbar. Können Sie etwas über die Determinante aussagen und wenn ja was?
2) Eine Gruppe ist kommutativ. Können Sie darüber aussagen, ob sie auch ein Ring ist und wenn ja was?
3) Eine Abbildung ist injektiv und surjektiv. Können Sie etwas über Bijektivität der Abbildung aussagen und wenn ja was?

1) ↳ Det ≠ 0

2) R1 erfüllt

3) => definitionen bijektiv = injektiv ∧ surjektiv

=> Abbildung bijektiv

Aufgabe 15 12P

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & -8 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & -6-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Begründen Sie, wenn die Matrix invertierbar, bzw. nicht invertierbar ist.

$$(6-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\cdot(-6-\lambda) + (2\cdot 2\cdot 4) + (-8\cdot -2\cdot 2)$$

$$-(4\cdot(-1-\lambda)\cdot -8) - (2\cdot 2\cdot(6-\lambda)) - ((-6-\lambda)\cdot -2\cdot 2)$$

$$16 + 32$$

$$48 + 32\cdot(-1-\lambda) - 4\cdot(6-\lambda) + 4\cdot(-6-\lambda)$$

$$\cancel{48} - 32 - 32\lambda - \cancel{24} + \cancel{4\lambda} - \cancel{24} - \cancel{4\lambda}$$

$$-32 - 32\lambda$$

$$-1\cdot(32 + 32\lambda)$$

$$-32\cdot(1+\lambda) \qquad \lambda_1$$

$$-1$$

$$(6-\lambda)\cdot(-1-\lambda) = -6 - 6\lambda + \lambda + \lambda^2$$

$$(\lambda^2 - 5\lambda - 6)\cdot(-6-\lambda) = -6\lambda^2 + 30\lambda + 36 - \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$$

$-\lambda^3 - \lambda^2 + 36\lambda + 32$

$-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 \ / \ (\lambda + 1) = (-\lambda^2 + 4)$

$-(-\lambda^3 - \lambda^2)$

$4\lambda + 4$

λ_1

oder

$\lambda = \sqrt{4} = \pm 2$

$(\lambda^2 - 4)$

$(\lambda - 2)$

λ_2

$\lambda^2 - 4 \ / \ (\lambda - 2) = (\lambda + 2)$

$-(\lambda^2 - 2\lambda)$

$-2\lambda - 4$

$2\lambda + 4$

OR

λ_3

oder

$-\lambda^2 + 4$

$\hookrightarrow 0 \pm \sqrt{0 + 4}$

$\underline{\underline{\pm 2}}$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -2$

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{5\times5}$ vier verschiedene 5×5-Matrizen.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Der Kern von A hat Dimension 2.

Welche Dimension hat der Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = 0$?

Welchen Rang hat die Matrix A?

(b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom $(0-\lambda)^2(\lambda-1909)(\lambda-1)(\lambda+5)$

Welche Eigenwerte hat die Matrix B?

Ist B invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Sei C die Diagonalmatrix mit den Einträgen 1, 2, 3, 4, 5, also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt die Matrix C?

(d) Nehmen Sie an, dass D vollen Rang hat. Ist die Abbildung $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit $f(x) = Dx$ bijektiv? Nennen Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^5$, die $f(x) = 0$ erfüllen!

a)

$\left.\begin{array}{l}\text{Dim (Ker A)} = 2 \\ \text{Rang} = 2\end{array}\right\}$ das selbe

$5 - 2 \Rightarrow$ Lösungsraum Dim $= 3$

b)

$\lambda_1 = 1909$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -5$

$\lambda_4 = 0$

$\lambda_5 = 0$

$(0-\lambda)^2$

λ^2

Nicht invertierbar da nicht vollen Rang