31. Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen: $4x_{n+2}+12x_{n+1}-7x_n=36$, $x_0=6$, $x_1=3$

das ist eine linear inhomogene Differenzengleichung, allgemein Form:
$x_{n+2}-ax_{n+1}+bx_n=s_n, n=0,1,2,\dots$ (I)
wie bei der linearen Differenzengleichung 1. Ordnung gilt: $x_n=x_n^{(h)}+x_n^{(p)}$

1. **homogene Gleichung**: $4x_{n+2}+12x_{n+1}-7x_n=0=x_{n+2}+3x_{n+1}-\frac{7}{4}x$, wird wie eine normale homogene Gleichung gelöst, Ansatz: $\lambda^2+a\lambda+b=0$

$$\Rightarrow \lambda^2+3\lambda-\frac{7}{4}=0 \Rightarrow {}_1\lambda_2=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+4\cdot\frac{7}{4}}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+7}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-3\pm4}{2}$$

also wären die Lösungen: $\lambda_1=\frac{-7}{2}$ und $\lambda_2=\frac{+1}{2}$

beide Lösungen sind reell und es gilt $\lambda_1\neq\lambda_2$, somit wird der 1. Lösungsweg einer homogenen Gleichung genommen: $x_n^{(h)}=c_1\cdot\lambda_1^n+c_2\cdot\lambda_2^n=c_1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2. **partikuläre Lösung** zu $s_n=36$
Ansatz für die partikuläre Lösung in der Tabelle, Skriptum, Seite 30 unten nachschauen: $x_n^{(p)}=A$ und nun in die inhomogene Gleichung
$4x_{n+2}+12x_{n+1}-7x_n=36$ einsetzen: $4\cdot A+12\cdot A-7\cdot A=36=9A \Rightarrow A=4$
also ist $x_n^{(p)}=4$

also die homogene und partikuläre Lösung zur **allgemeinen Lösung** zusammenfassen:

$$x_n=x_n^{(h)}+x_n^{(p)} \Rightarrow x_n=c_1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+4$$

So nun haben wir noch 2 Anfangsbedingungen und sollen die spezielle Lösung finden, also setzten wir mal $x_0=6$ und $x_1=3$ ein:

$$x_0=6=c_1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^0+c_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+4=c_1\cdot1+c_2\cdot1+4$$

$$x_1=3=c_1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^1+c_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+4=c_1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+c_2\cdot\frac{1}{2}+4$$

jetzt haben wir 2 Gleichungen in 2 Unbekannten, also nehme ich das Eliminationsverfahren um die Gleichungen zu lösen:

$6=c_1+c_2+4 \Rightarrow$ mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, damit man c_2 weg bekommt

$3=-\frac{7}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2+4$

$$-\left(3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 2\right)$$

$$3 = -\frac{7}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 4$$

$$0 = -\frac{8}{2}c_1 + 2 \Rightarrow 4c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

so nun $c_1 = \frac{1}{2}$ zurück einsetzen in $6 = c_1 + c_2 + 4$ um c_2 auszurechnen:

$$6 = \frac{1}{2} + c_2 + 4 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$$

also lautet die **Lösung der Differenzengleichung**: $x_n = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$