Prüfungsbeispiel 17

3) Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion:

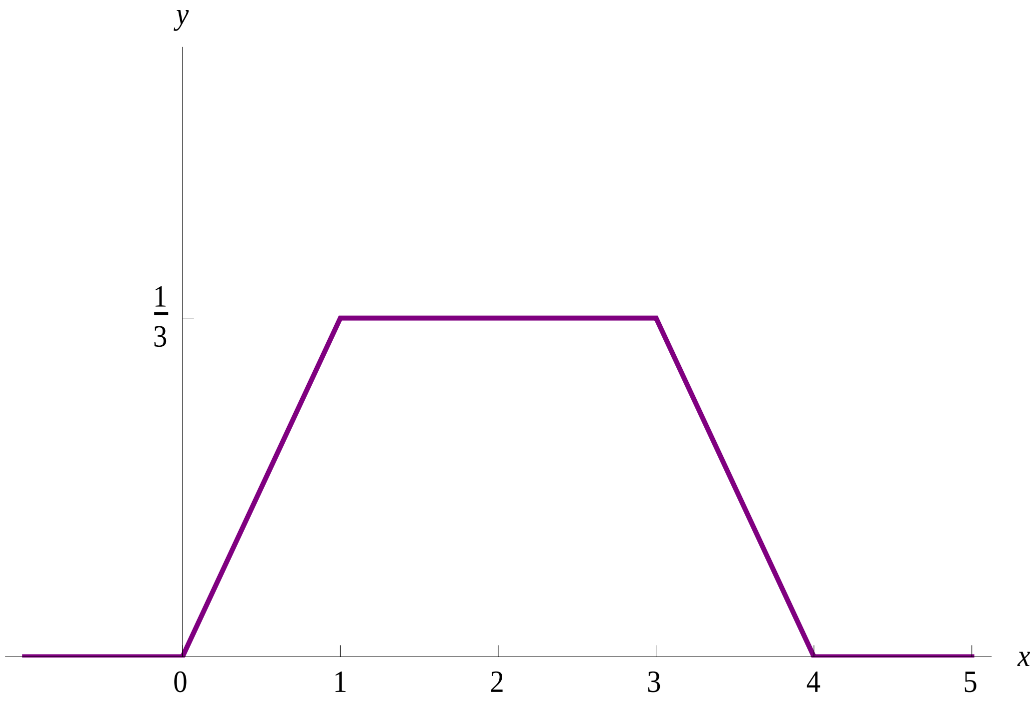
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{6} & \text{für} \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}(x-1) & \text{für} \quad 1\le x<3 \\ -\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3} & \text{für} \quad 3\le x<4 \\ 1 & \text{für} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{3} & \text{für} \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{für} \quad 1\le x<3 \\ -\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{3} & \text{für} \quad 3\le x<4 \\ 0 & \text{für} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

<u>Grafische Darstellung der Dichtefunktion:</u>



b) Berechnen Sie den Erwartungswert EX.

$$EX = \int x \cdot f(x)dx$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot f(x)dx + \int_1^3 x \cdot f(x)dx + \int_3^4 x \cdot f(x)dx =$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{3}dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{3}dx + \int_3^4 x \cdot (\frac{4}{3} - \frac{x}{3})dx =$$

$$EX = \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{3}dx + \int_3^4 (\frac{4x}{3} - \frac{x^2}{3})dx =$$

$$EX = \frac{x^3}{9}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{6}\Big|_1^3 + (\frac{4x^2}{6} - \frac{x^3}{9})\Big|_3^4 = (\frac{1}{9} - 0) + (\frac{9}{6} - \frac{1}{6}) + [(\frac{64}{6} - \frac{64}{9}) - (\frac{36}{6} - \frac{27}{9})] =$$

$$EX = \frac{1}{9} + \frac{8}{6} + \frac{64}{6} - \frac{64}{9} - 6 + 3 = \frac{72}{6} - \frac{63}{9} - 3 = 12 - 7 - 3 = 2$$

$$\underline{\underline{EX = 2}}$$

c) Es liegt eine Stichprobe von Umfang n = 40 vor, die bereits in 4 Klassen $K_j\,(j = 1,...,4)$ eingeteilt wurden. Man erhielt die folgenden absoluten Klassenhäufigkeiten H_j:

K_j	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)
H_j	10	14	14	2

Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$), ob die Grundgesamtheit nach der oben gegebenen Verteilungsfunktion F(x) verteilt ist.

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(H_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

H_i .... Absolute Häufigkeiten der Stichprobenverteilung
n …….. Stichprobengröße (n= 40)
pi ……... Relative Häufigkeiten der vorgegebenen Verteilung
k ……… Anzahl der Klassen (k=4)

$$T = \frac{(10 - 40 \cdot \frac{1}{6})^2}{40 \cdot \frac{1}{6}} + \frac{(14 - 40 \cdot \frac{1}{3})^2}{40 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(14 - 40 \cdot \frac{1}{3})^2}{40 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(2 - 40 \cdot \frac{1}{6})^2}{40 \cdot \frac{1}{6}} = \underline{\underline{5}}$$

Hier wird der Chi-Quadrat Anpassungstest verwendet. Er beantwortet die Frage ob eine Stichprobenverteilung mit einer vorgegebenen Verteilung übereinstimmt.
Der kritische Bereich ist definiert mit $T > \chi^2_{k.1;1-\alpha} = 7{,}815$.
Unser Wert 5 ist nicht größer als 7,815, daher stimmt die Stichprobenverteilung mit der vorgegeben Verteilung überein.