Beispiel 34 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 6, 03.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man berechne das Taylorsche Näherungspolyom zweiter Ordnung der Funktion $f(x, y) = e^{x-y}(x +^{)} +x \sin(x^2 - y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

2 Theoretische Grundlagen: Taylorsches Näherungspolynom

Die Formel für das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung lautet:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \cdot (f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0))+$$

$$\frac{1}{2!} \cdot (f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2)$$

3 Lösung des Beispiels

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$f_x = e^{x-y}(x + 1) + e^{x-y} + \sin(x^2 - y) + \cos(x^2 - y) \cdot 2x$$

$$f_y = -e^{x-y}(x + 1) - x \cos(x^2 - y)$$

Nun bilden wir f_{xx} und f_{yy}:

$$f_{xx} = e^{x-y}(x + 1) + e^{x-y} + \cos(x^2 - y)2x - \sin(x^2 - y)2x + \cos(x^2 - y)2$$

$$f_{yy} = e^{x-y}(x + 1 = -x \sin(x^2 - y)$$

Da unsere gegebene Funktion nur stetige 'Teile' enthält rufen wir uns den Satz von Schwarz (Beispiel 17) in Erinnerung und beginnen mit der gemischten partiellen Ableitung $f_y x$ (Zur Probe kann f_{xy} errechnet werden!):

$$f_{yx} = -e^{x-y}(x + 1) - e^{x-y} - \cos(x^2 - y) + \sin(x^2 - y) \cdot 2x$$

Nun setzen wir in das Näherungspolynom ein:

$$f(x, y) = e^{-\pi/2} + (2 \cdot e^{-\pi/2} - 1) \cdot x + (-e^{-\pi/2}) \cdot y+$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot e^{-\pi/2} \cdot x^2) + (2 \cdot (-2) \cdot e^{-\pi/2} \cdot x \cdot (y - \frac{\pi}{2})) + (e^{-\pi/2} \cdot (y - \frac{\pi}{2})^2))$$