Runde 9, Beispiel 57

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.01.2007

1 Angabe

Seien $y, z \in \mathbb{C}^N$ und $c, d \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die "N"-periodische Fortsetzung des Vektors $x \in \mathbb{C}^N$ sowie $\omega = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, daß die sogenannte periodische Faltung gilt:

$$y \cdot z := \left(\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} y_{\updownarrow} z_{k-\updownarrow}\right)_k \overset{\text{DFT}}{\overbrace{\longrightarrow}} (c_k \cdot d_k)_k$$

2 Lösung des Beispiels

Gegeben seien die periodischen Folgen $\tilde{x}_1[n]$ und $\tilde{x}_2[n]$ mit der Periodendauen N. Ihre diskreten Fouriertransformierten (DFT) sind gegeben durch:

$$\tilde{X}_1(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{mk}$$

$$\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}_2[r] W_N^{rk}$$

Wir definieren eine neue Folge $\tilde{x}_3[n]$, die sich wie folgt bildet:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

$\tilde{x}_3[n]$ ergibt sich durch die IDFT

$$\tilde{x}_3[n] = IDFT\{\tilde{X}_3(k)\}$$

$$\tilde{x}_3[...... \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk}$$

Durch Einsetzen der ersten beiden Gleichungen und Umordnen der Summen ergibt sich:

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}_2[r] \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(n-m-r)k}$$

Der letzte Term läßt sich wie folgt auswerten:

$$\sum e^{j2\pi k(n-m-r)/N} = \begin{cases} N, & r = m - m + p \cdot N,\ p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit p als ganzer Zahl vereinfacht sich Gleichung 8.20 zu:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m+p \cdot N] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m]\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich durch die Periodizität von $\tilde{x}_2[n]$. Bis auf die Summationsgrenzen, die hier nur über eine Periode laufen, ist er identisch mit der Faltungssumme. $\tilde{x}_3[n]$ ist selber auch periodisch. Gleichung 8.21 wird daher als periodische Faltung bezeichnet.