2. UE Analysis f. INF und WINF

21 $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$, $\forall n \geq 0$. Es gilt:

(i) $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Beweis durch Induktion:

$n=0$: $a_0 = 3 \geq 1$. $n \to n+1$: $a_n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1} \geq \sqrt{2-1} = 1$.

(ii) (a_n) ist monoton fallend, d.h. $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion: $a_1 = \sqrt{6-1} = \sqrt{5} \leq 3 = a_0$ $(n=0)$.

$n \to n+1$: $a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \sqrt{2a_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2a_n - 1} \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt die Beschränktheit und Wohldefiniertheit: $1 \leq a_n \leq a_0 = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Also ist (a_n) konvergent, und für $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n - 1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(2a_n) - 1} =$$

$$= \sqrt{2a-1} \Rightarrow a^2 = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a = 1.$$

40 $$a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}} \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} \leq$$

$$\leq \frac{n+2-n}{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}}}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{6}}} = \frac{2}{\sqrt[6]{n}}.$$ Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

folgt: $$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 2 \cdot \sqrt[6]{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 2 \cdot \sqrt[6]{0} = 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

47 $$0 \leq a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

56 $\cos\frac{n\pi}{2}$ hat die Periode 4 und $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$ die Periode 2.
Wir betrachten daher 4 Teilfolgen von $a_n = \frac{n^2\cos\frac{n\pi}{2}+1}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$, je nachdem $n \equiv 0, 1, 2, 3 \mod 4$.

<u>$n \equiv 0 \mod 4$:</u> $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos 0 = 1$, $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{n^2+1}{n+1} + 1 = \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\infty+0}{1+0} + 1 = \underline{\underline{\infty}}.$$

<u>$n \equiv 1 \mod 4$:</u> $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{n+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}.$$

<u>$n \equiv 2 \mod 4$:</u> $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\pi = -1$, $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{-n^2+1}{n+1} + 1 = \frac{-n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-\infty+0}{1+0} + 1 = \underline{\underline{-\infty}}$$

<u>$n \equiv 3 \mod 4$:</u> $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\frac{7\pi}{2} = -1$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{n+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}.$$

Also sind die <u>Häufungspunkte von (a_n)</u> gegeben durch:

$$\underline{\underline{-\infty = \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad -1, \quad \infty = \limsup_{n\to\infty} a_n}}$$

63 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \Longrightarrow$$

Mit $a_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ ist die <u>Partialsummenfolge</u> gegeben durch:

$$\underset{\sim}{S_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{6} + - \ldots + + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(formaler Beweis durch Induktion: $S_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}},$$

denn $0 \le \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n}$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

$\boxed{69}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}\right),$$

und nach der Moivre'schen Formel haben wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n =$$

$= \frac{1}{1-q}$, denn für $q = \frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ gilt

$|q| = \frac{1}{4}\cdot|1+i\sqrt{3}| = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{1+3} = \frac{1}{2} < 1$ (geometrische Reihe).

Dabei ist $$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4})} = \frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}}{(\frac{3}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4})(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4})} = \frac{\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{\frac{12}{4}} =$$

$= \frac{3+i\sqrt{3}}{3} = 1+\frac{i\sqrt{3}}{3}$, also

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n} = 1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}}}.$$

Damit haben wir zugleich auch den Grenzwert der Reihe aus Aufgabe $\boxed{68}$ berechnet.

Die Formel $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$ (siehe Buch) gilt auch für $q \in \mathbb{C}$, da $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} |q^n| = \lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$ (nach Definition des Grenzwerts in $\mathbb{C}$).