

3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer

Forschungsbereich Theory and Logic
Institut für Logic and Computation

7.5.2019

Was Sie letztes Mal hörten

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. **Kontextfreie Grammatiken**
 - 6.1. **Definition**
 - 6.2. Beispiele
 - 6.3. Mehrdeutigkeit
 - 6.4. Andere Notationen
 - 6.5. Style Guide für Grammatiken
 - 6.6. Grammatiken in freier Wildbahn
 - 6.7. Jenseits der Kontextfreiheit
7. Prädikatenlogik

Kontextfreie Grammatiken

- Menge von Zeichenersetzungsregeln
- ausdrucksstärker als endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
- können geschachtelte Strukturen darstellen

Wohlgeformte Klammersausdrücke

$$G = \langle \{W\}, \{ (,) \}, \{ W \rightarrow \varepsilon \mid (W) \mid W W \}, W \rangle$$

Beispiel einer Ableitung: $W \Rightarrow_P W W$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow_P (W)(W) \\ &\Rightarrow_P ()(W W) \\ &\Rightarrow_P ()((W)(W)) \\ &\Rightarrow_P ()(()) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(G) = \{ \varepsilon, (), (()), ()(), ((())), (())(), ()(), ()()(), \dots \}$$

Kontextfreie Grammatik

... wird beschrieben durch ein 4-Tupel $G = \langle V, T, P, S \rangle$, wobei

- V ... Menge der Nonterminalsymbole (Variablen)
- T ... Menge der Terminalsymbole ($V \cap T = \{\}$)
- $P \subseteq V \times (V \cup T)^*$... Produktionen
- $S \in V$... Startsymbol

Schreibweise: $A \rightarrow w$ statt $(A, w) \in P$

$A \rightarrow w_1 \mid \dots \mid w_n$ statt $A \rightarrow w_1, \dots, A \rightarrow w_n$

Ableitbarkeit

... in einem Schritt:

$xAy \Rightarrow xwy$, falls $A \rightarrow w \in P$ und $x, y \in (V \cup T)^*$.

... in mehreren Schritten:

$u \xRightarrow{*} v$, falls

- $u = v$, oder
- $u \Rightarrow u'$ und $u' \xRightarrow{*} v$ für ein Wort $u' \in (V \cup T)^*$.

Von Grammatik G generierte Sprache

$$\mathcal{L}(G) = \{ w \in T^* \mid S \xRightarrow{*} w \}$$

Grammatiken G_1 und G_2 heißen äquivalent, wenn $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$ gilt.

Grammatik für $a^n b^n$

$$G = \langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid a S b\}, S \rangle$$

$aabb \in \mathcal{L}(G)$, weil $S \xRightarrow{*} aabb$ gilt:

$$S \Rightarrow a S b \Rightarrow aa S bb \Rightarrow aa \varepsilon bb \Rightarrow aabb$$

$$\mathcal{L}(G) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} = \{ \varepsilon, ab aabb aaabbb, \dots \}$$

Kontextfreie Sprachen

Eine Sprache heißt kontextfrei, wenn es eine kontextfreie Grammatik gibt, die sie generiert.

Eingeschränkte Ableitungsrelationen

Linksableitungsrelation \Rightarrow_L : Nur die linkeste Variable wird ersetzt.

Rechtsableitungsrelation \Rightarrow_R : Nur die rechteste Variable wird ersetzt.

Parallelableitungsrelation \Rightarrow_P : Alle Variablen werden gleichzeitig ersetzt.

$$G = \langle \{A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{A \rightarrow a, B \rightarrow b \mid ABC, C \rightarrow c\}, B \rangle$$

abc besitzt 6 Ableitungen in G :

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$$

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow aBC \Rightarrow aBc \Rightarrow abc$$

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow AbC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$$

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow AbC \Rightarrow Abc \Rightarrow abc$$

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow ABc \Rightarrow aBc \Rightarrow abc$$

$$B \Rightarrow ABC \Rightarrow ABc \Rightarrow Abc \Rightarrow abc$$

aber jeweils nur eine Links-, Rechts- und Parallelableitung:

$$B \Rightarrow_L ABC \Rightarrow_L aBC \Rightarrow_L abC \Rightarrow_L abc$$

$$B \Rightarrow_R ABC \Rightarrow_R ABc \Rightarrow_R Abc \Rightarrow_R abc$$

$$B \Rightarrow_P ABC \Rightarrow_P abc$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(G) &= \{w \in T^* \mid S \xRightarrow{*} w\} = \{w \in T^* \mid S \xRightarrow{*}_L w\} \\ &= \{w \in T^* \mid S \xRightarrow{*}_R w\} = \{w \in T^* \mid S \xRightarrow{*}_P w\} \end{aligned}$$

Was Sie letztes Mal hörten

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. **Kontextfreie Grammatiken**
 - 6.1. Definition
 - 6.2. Beispiele
 - 6.3. **Andere Notationen**
 - 6.4. Style Guide für Grammatiken
 - 6.5. Grammatiken in freier Wildbahn
 - 6.6. Jenseits der Kontextfreiheit
7. Prädikatenlogik

Notationen für kontextfreie Produktionen

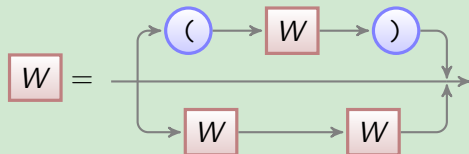
Backus-Naur-Form (BNF)

$\langle Real \rangle ::= \langle Digit \rangle \langle Digits \rangle " ." \langle Digits \rangle \langle Scale \rangle$

Erweiterte Backus-Naur-Form (EBNF)

$IdList \rightarrow Id \{ ", " Id \}$

Syntaxdiagramme



$W \rightarrow (W)$
| ϵ
| $W W$

Was Sie letztes Mal hörten

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. **Kontextfreie Grammatiken**
 - 6.1. Definition
 - 6.2. Beispiele
 - 6.3. Andere Notationen
 - 6.4. **Style Guide für Grammatiken**
 - 6.5. Grammatiken in freier Wildbahn
 - 6.6. Jenseits der Kontextfreiheit
7. Prädikatenlogik

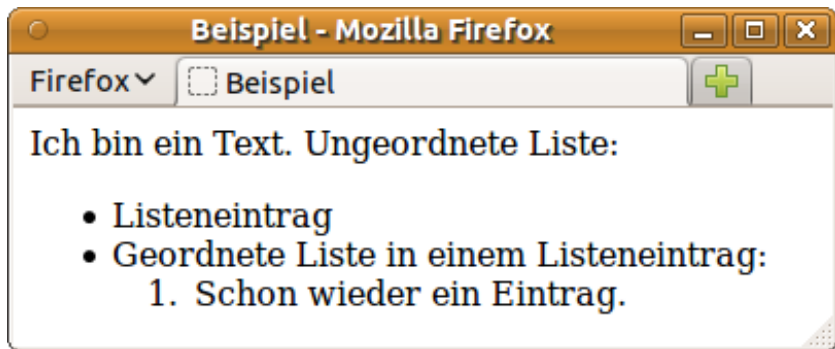
Style Guide für Grammatiken

- Wiederholungsoperator statt Rekursion
- Optionsoperator statt Leerwort
- Modularisierung statt Duplizierung
- Sprechende Namen
- Klare Kennzeichnung und Unterscheidung von Terminalen, Nonterminalen und Metanotationen
- Strukturierung statt minimale Anzahl von Nonterminalen und Regeln

Beispiel: einfache HTML-Dokumente

- Beginnen mit `<html>`, enden mit `</html>`.
Dazwischen: Dokumentenkopf und -körper.
- Kopf: Dokumenttitel zwischen `<head>` und `</head>`.
Titel: Text zwischen `<title>` und `</title>`.
- Körper beginnt mit `<body>`, endet mit `</body>`.
Dazwischen: Texte, geordnete und ungeordnete Listen in beliebiger Reihenfolge und Zahl.
- Geordnete Liste: Listeneinträge zwischen `` und ``.
Ungeordnete Liste: Listeneinträge zwischen `` und ``.
Listeneintrag: Folge von Texten und Listen zwischen `` und ``.
- Text: Folge von Buchstaben, Ziffern, Leerzeichen, Sonderzeichen.

```
<html><head><title>Beispiel</title></head>
  <body>Ich bin ein Text. Ungeordnete Liste:
    <ul><li>Listeneintrag</li>
      <li>Geordnete Liste in einem Listeneintrag:
        <ol><li>Schon wieder ein Eintrag.</li></ol>
      </li>
    </ul>
  </body>
</html>
```



Gesucht: Grammatik G in EBNF für einfache HTML-Dokumente

$G = \langle V, T, P, Document \rangle$, wobei:

$P = \{$

- $Document \rightarrow "<html>" \textit{Head} \textit{Body} "</html>"$,
- $\textit{Head} \rightarrow "<head>" \textit{Title} "</head>"$,
- $\textit{Title} \rightarrow "<title>" \textit{Text} "</title>"$,
- $\textit{Body} \rightarrow "<body>" \textit{Contents} "</body>"$,
- $\textit{Contents} \rightarrow \{ \textit{Text} \mid \textit{OList} \mid \textit{UList} \}$,
- $\textit{OList} \rightarrow "" \textit{Item} \{ \textit{Item} \} ""$,
- $\textit{UList} \rightarrow "" \textit{Item} \{ \textit{Item} \} ""$,
- $\textit{Item} \rightarrow "" \textit{Contents} ""$,
- $\textit{Text} \rightarrow \textit{Char} \{ \textit{Char} \}$,
- $\textit{Char} \rightarrow "a" \mid \dots \mid "z" \mid "A" \mid \dots \mid "Z" \mid "0" \mid \dots \mid "9" \mid$
 $"_{" \mid " " \mid " , " \mid " ; " \mid " : " \mid " . " \mid " ! " \mid " ? " \}$

$V = \{ Document, Head, Title, Body, Contents, OList, UList, Item, Text, Char \}$

$T = \{ \dots \text{alle Zeichen zwischen Anführungszeichen} \dots \}$

Nur eine Rekursion für die Schachtelung der Listen notwendig!

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. Kontextfreie Grammatiken
7. **Prädikatenlogik**
 - 7.1. **Motivation**
 - 7.2. Terme
 - 7.3. Syntax
 - 7.4. Semantik
 - 7.5. Modellierung

Sokrates aus Sicht der Aussagenlogik



Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

A

B

C

$A, B \not\vdash C$

$\frac{1 \quad 1 \quad 0}{0}$

Clipart courtesy FCIT

- Die Prämissen und die Konklusion sind für die Aussagenlogik **atomar**.
- Können nur durch (drei unabhängige) Variablen modelliert werden.
- Keine korrekte Inferenz!
- Keine Berücksichtigung der inneren Struktur der Aussagen:
„alle Menschen“, „ist sterblich“, „ist Mensch“, ...

Aussagenlogik zu ausdrucksschwach für eine adäquate Modellierung!

Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um

- Quantoren: für alle (\forall), es gibt (\exists)
- Prädikatensymbole: $Mensch(x)$... „x ist ein Mensch“
- Funktionsterme:
 $Mensch(mutter(sokrates))$... „Sokrates Mutter ist ein Mensch“

Sokrates aus Sicht der Prädikatenlogik



Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

$\forall x (Mensch(x) \supset Sterblich(x))$

$Mensch(sokrates)$

$Sterblich(sokrates)$

Clipart courtesy FCIT

Warum ist das eine korrekte Inferenz?

$\forall x P(x) \models P(t)$ (Instanziierungsregel)

Wenn P für alle x gilt, dann gilt P für jedes spezielle Objekt t .

$\forall x (Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \models Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates)$

$A, A \supset B \models B$ (Modus ponens)

Wenn A gilt und wenn B aus A folgt, dann gilt auch B .

$Mensch(sokrates), Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates) \models Sterblich(sokrates)$

$$\frac{Mensch(sokrates) \quad \frac{\forall x (Mensch(x) \supset Sterblich(x))}{Mensch(sokrates) \supset Sterblich(sokrates)}}{Sterblich(sokrates)}$$

Funktions-, Prädikaten- und Variablensymbole

\mathcal{F} ... Menge der Funktionssymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)

$f/n \in \mathcal{F}$... f ist ein n -stelliges Funktionssymbol.

(f benötigt n Argumente.)

$f/0$... nullstelliges Funktionssymbol, Konstantensymbol

\mathcal{P} ... Menge der Prädikatensymbole; besitzen Stelligkeit (Arität)

$P/n \in \mathcal{P}$... P ist ein n -stelliges Prädikatensymbol.

(P benötigt n Argumente.)

$P/0$... nullstelliges Prädikatensymbol, entspricht Aussagenvariable

$\mathcal{V} = \{x, y, z, x_0, x_1, \dots\}$... Individuenvariablensymbole

Mensch(mutter(sokrates)), Sterblich(x)

Funktionssymbole: *mutter/1, sokrates/0*

Prädikatensymbole: *Mensch/1, Sterblich/1*

Variablensymbol: *x*

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. Kontextfreie Grammatiken
7. **Prädikatenlogik**
 - 7.1. Motivation
 - 7.2. **Terme**
 - 7.3. Syntax
 - 7.4. Semantik
 - 7.5. Modellierung

Terme

- ... bestehen aus Variablen- und Funktionssymbolen.
- ... ermöglichen die Bildung von Ausdrücken wie $3 \cdot \sin(x + 2)$.
- ... sind eine allgemeine Repräsentationsform für hierarchische Strukturen.

Terme über \mathcal{F} und \mathcal{V}

Die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, kurz \mathcal{T} , der Terme über \mathcal{F} und \mathcal{V} ist die kleinste Menge, für die gilt:

- (t1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ Individuenvariablen sind Terme.
- (t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$. Konstantensymbole sind Terme.
- (t3) $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$.
Funktionssymbole mit der passenden Zahl an Termargumenten sind Terme.

Notation:

- Pre-/Postfixnotation für manche unären ($n = 1$) Funktionssymbole
- Infixnotation für manche binären ($n = 2$) Funktionssymbole
- Klammerneinsparungen durch Prioritäten

Verschiedene Terme

$3 \cdot \sin(x + 2)$ bzw. $\cdot(3, \sin(+ (x, 2)))$

$s(s(s(0)))$

Darstellung der Zahl $3 = 1 + (1 + (1 + 0))$

$f(a, f(b, f(c, nil)))$

Darstellung der Liste $[a, b, c]$

$g(f(a), g(a, (f(x))))$ ist ein Term, falls $a/0, f/1, g/2 \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathcal{V}$.

$$\frac{g/2 \in \mathcal{F} \quad \frac{f/1 \in \mathcal{F} \quad \frac{a/0 \in \mathcal{F} \quad a \in \mathcal{T}}{f(a) \in \mathcal{T}}}{f(a) \in \mathcal{T}}}{g(f(a), g(a, (f(x)))) \in \mathcal{T}} \quad \frac{g/2 \in \mathcal{F} \quad \frac{a/0 \in \mathcal{F} \quad a \in \mathcal{T}}{a \in \mathcal{T}} \quad \frac{f/1 \in \mathcal{F} \quad \frac{x \in \mathcal{V} \quad x \in \mathcal{T}}{f(x) \in \mathcal{T}}}{f(x) \in \mathcal{T}}}{g(a, (f(x))) \in \mathcal{T}}}{g(f(a), g(a, (f(x)))) \in \mathcal{T}} \quad \text{t3}$$

Die Menge der Terme, $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, ist die kleinste Menge, sodass:

(t1) $v \in \mathcal{T}$, falls $v \in \mathcal{V}$.

(t2) $f \in \mathcal{T}$, falls $f/0 \in \mathcal{F}$.

(t3) $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$, falls $f/n \in \mathcal{F}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$.

Aussagenlogische Formeln sind Terme.

Sei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ und $\mathcal{F} = \{\top/0, \perp/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \dots\}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ die Menge der aussagenlogischen Formeln (unter Verwendung der Infixnotation für binäre Operatoren).

$(A \wedge B) \supset C$ entspricht $\supset(\wedge(A, B), C)$.

$A \wedge (B \supset C)$ entspricht $\wedge(A, \supset(B, C))$.

Reguläre Ausdrücke über dem Alphabet Σ sind Terme.

Sei $\mathcal{V} = \{\}$ und $\mathcal{F} = \{\varepsilon/0, \emptyset/0, +/2, \cdot/2, */1\} \cup \{s/0 \mid s \in \Sigma\}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ die Menge der regulären Ausdrücke über Σ .

($+$ und \cdot werden infix notiert, \cdot wird nicht angeschrieben, und $*$ ist ein Postfixoperator).

So ziemlich alles lässt sich als Term auffassen ...

Semantik von Termen

Variablensymbole: Wert abhängig von momentaner Wertebelegung

Konstanten- und Funktionssymbole:

- Vordefinierte Symbole: feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Termsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation als Konstante bzw. Funktionen

Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich \mathcal{U} ordnet jedem Funktionssymbol aus \mathcal{F} eine Funktion wie folgt zu:

$$I(f) \in \mathcal{U} \quad \text{für } f/0 \in \mathcal{F}$$

$$I(f): \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U} \quad \text{für } f/n \in \mathcal{F}, n > 0$$

Arithmetische Ausdrücke (wie etwa $(x+1)*(x+1+1)$)

$$\mathcal{F} = \{0, 1, +, -, *\}$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$I(0) = 0$$

$$I(1) = 1$$

$$I(+)=+ \quad (\text{Addition})$$

$$I(-)=- \quad (\text{Subtraktion})$$

$$I(*)=\cdot \quad (\text{Multiplikation})$$

Aussagenlogik

$$\mathcal{F} = \{\top/0, \perp/0, \neg/1, \wedge/2, \vee/2, \dots\}$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{B} = \{0, 1\}$$

$$I(\top) = 1$$

$$I(\neg) = \text{not}$$

...

$$I(\perp) = 0$$

$$I(\wedge) = \text{and}$$

Reguläre Ausdrücke

$$\mathcal{F} = \{\varepsilon/0, \emptyset/0, +/2, \cdot/2, */1\} \cup \{s/0 \mid s \in \Sigma\}$$

$$\mathcal{U} = 2^{\Sigma^*}$$

$$I(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$$

$$I(+)=\cup$$

$$I(\emptyset) = \{\}$$

$$I(\cdot) = \cdot$$

$$I(s) = \{s\}$$

$$I(*) = *$$

$\sigma: \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \dots$ Wertebelegung für die Variablensymbole

Semantik von Termen

Der Wert eines Terms in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\text{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

(v1) $\text{val}_{I,\sigma}(v) = \sigma(v)$ für $v \in \mathcal{V}$;

(v2) $\text{val}_{I,\sigma}(f) = I(f)$ für $f/0 \in \mathcal{F}$;

(v3) $\text{val}_{I,\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = I(f)(\text{val}_{I,\sigma}(t_1), \dots, \text{val}_{I,\sigma}(t_n))$ für $f/n \in \mathcal{F}$,
 $n > 0$.

Wert von $(x+1)*(x+1+1)$ für $\sigma(x) = 0$

Arithmetik: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, $I_1(1) = 1$, $I_1(+)$ = +, $I_1(*)$ = \cdot

$$\text{val}_{I_1,\sigma}((x+1)*(x+1+1)) = (0 + 1) \cdot (0 + 1 + 1) = 2$$

Aussagenlogik: $\mathcal{U} = \mathbb{B}$, $I_2(1) = 1$, $I_2(+)$ = or, $I_2(*)$ = and

$$\text{val}_{I_2,\sigma}((x+1)*(x+1+1)) = \text{and}(\text{or}(0, 1), \text{or}(0, \text{or}(1, 1))) = 1$$

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. Kontextfreie Grammatiken
7. **Prädikatenlogik**
 - 7.1. Motivation
 - 7.2. Terme
 - 7.3. **Syntax**
 - 7.4. Semantik
 - 7.5. Modellierung

Prädikatenlogik – Syntax

\mathcal{V} ... Individuenvariablensymbole

\mathcal{F}, \mathcal{P} ... Funktions- bzw. Prädikatensymbole mit Stelligkeiten

$(\mathcal{F}, \mathcal{P})$... „Signatur“

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Die Menge \mathcal{PF} der prädikatenlogischen Formeln über der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

(p1) $P \in \mathcal{PF}$, wenn $P/0 \in \mathcal{P}$;

(p2) $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{PF}$, wenn $P/n \in \mathcal{P}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$;

(p3) $\top, \perp \in \mathcal{PF}$;

(p4) $\neg F \in \mathcal{PF}$, wenn $F \in \mathcal{PF}$;

(p5) $(F * G) \in \mathcal{PF}$, wenn $F, G \in \mathcal{PF}$ und $*$ $\in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \neq, \supset, \subset\}$.

(p6) $\forall x F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

(p7) $\exists x F \in \mathcal{PF}$, wenn $x \in \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{PF}$.

$P, P(t_1, \dots, t_n)$... „Atomformeln“

$\forall x (Mensch(x) \supset Sterblich(x))$ ist eine Formel

Mensch/1 und *Sterblich*/1 sind Prädikatensymbole.

$$\frac{\frac{\frac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}} \quad t1}{Mensch/1 \in \mathcal{P}} \quad p2 \quad \frac{\frac{x \in \mathcal{V}}{x \in \mathcal{T}} \quad t1}{Sterblich/1 \in \mathcal{P}} \quad p2}{\frac{Mensch(x) \in \mathcal{PF} \quad Sterblich(x) \in \mathcal{PF}}{(Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}} \quad p5} \quad p6}{\forall x (Mensch(x) \supset Sterblich(x)) \in \mathcal{PF}} \quad p6$$

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. Kontextfreie Grammatiken
7. **Prädikatenlogik**
 - 7.1. Motivation
 - 7.2. Terme
 - 7.3. Syntax
 - 7.4. **Semantik**
 - 7.5. Modellierung

Prädikatenlogik – Semantik

Prädikatensymbole: repräsentieren Relationen bzw. Elementaraussagen

- Vordefinierte Symbole wie \top und \perp : feste, unveränderliche Bedeutung (fix eingebaut in Formelsemantik)
- Freie Symbole: Interpretation durch Relationen bzw. Wahrheitswerte

(Prädikatenlogische) Interpretation

Eine Interpretation I über einem Wertebereich \mathcal{U} ordnet jedem Symbol der Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ eine Funktion bzw. Relation wie folgt zu:

$$I(f) \in \mathcal{U} \quad \text{für } f/0 \in \mathcal{F}$$

$$I(f): \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U} \quad \text{für } f/n \in \mathcal{F}, n > 0$$

$$I(P) \in \{0, 1\} \quad \text{für } P/0 \in \mathcal{P}$$

$$I(P) \subseteq \mathcal{U}^n \quad \text{für } P/n \in \mathcal{P}, n > 0$$

$$I(P): \mathcal{U}^n \mapsto \{0, 1\} \quad (\text{alternative Sichtweise})$$

Nullstellige Prädikatensymbole = Aussagenvariablen

Zwei Interpretationsmöglichkeiten für $P/0 \in \mathcal{P}$: $I(P) = 0$ oder $I(P) = 1$.

Einstellige Prädikatensymbole = Typen, Klassen

Sei $Mann/1, Frau/1 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \{\text{Andrea, Anna, Hans, Maria, Tom}\}$.

$I(Mann)$ und $I(Frau)$ als Mengen:

$$I(Mann) = \{\text{Andrea, Hans, Tom}\}$$

$$I(Frau) = \{\text{Andrea, Anna, Maria}\}$$

... oder als Funktionen:

x	$I(Mann)(x)$	$I(Frau)(x)$
Andrea	1	1
Anna	0	1
Hans	1	0
Maria	0	1
Tom	1	0

Mehrstellige Prädikatsensymbole = Relationen, Beziehungen

Sei $</2 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(<)$ als Menge:

$$I(<) = \{(m, n) \mid m < n\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (1, 3), \dots\}$$

... oder als Funktion:

$$I(<)(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $Plus/3 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. $I(Plus)$ als Menge:

$$\begin{aligned} I(Plus) &= \{(k, l, m) \mid k + l = m\} \\ &= \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 2), (1, 1, 2), (0, 2, 2), \dots\} \end{aligned}$$

... oder als Funktion:

$$I(Plus)(k, l, m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k + l = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Der Wert einer Formel in einer Interpretation I mit Variablenbelegung σ wird festgelegt durch die Funktion $\text{val}_{I,\sigma}$, definiert als:

$$(v1) \text{ val}_{I,\sigma}(P) = I(P) \text{ für } P/0 \in \mathcal{P};$$

$$(v2) \text{ val}_{I,\sigma}(P(t_1, \dots, t_n)) = I(P)(\text{val}_{I,\sigma}(t_1), \dots, \text{val}_{I,\sigma}(t_n)) \text{ für } P/n \in \mathcal{P};$$

$$(v3) \text{ val}_{I,\sigma}(\top) = 1 \text{ und } \text{val}_{I,\sigma}(\perp) = 0;$$

$$(v4) \text{ val}_{I,\sigma}(\neg F) = \text{not val}_{I,\sigma}(F);$$

$$(v5) \text{ val}_{I,\sigma}((F * G)) = \text{val}_{I,\sigma}(F) \circledast \text{val}_{I,\sigma}(G),$$

wobei \circledast die logische Funktion zum Operator $*$ ist;

$$(v6) \text{ val}_{I,\sigma}(\forall x F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \text{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(v7) \text{ val}_{I,\sigma}(\exists x F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \text{val}_{I,\sigma'}(F) = 1 \text{ für mind. ein } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\sigma \overset{x}{\sim} \sigma' \dots \sigma(v) = \sigma'(v)$ für alle $v \in \mathcal{V}$ mit $v \neq x$

(σ und σ' sind identisch, nur $\sigma(x)$ und $\sigma'(x)$ können verschieden sein.)

$\forall x \exists y P(x, s(y))$ ist wahr

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n - 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\text{val}_{I, \sigma}(\forall x \exists y P(x, s(y))) = 1$$

$$\iff \text{val}_{I, \sigma'}(\exists y P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \text{val}_{I, \sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff I(P)(\text{val}_{I, \sigma''}(x), \text{val}_{I, \sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \\ \text{und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \sigma''(x) = \sigma''(y) - 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

Wir wählen jene Variablenbelegung σ'' , für die $\sigma''(y) = \sigma''(x) + 1$ gilt:

$$\sigma''(x) = (\sigma''(x) + 1) - 1 \quad \text{für alle } \sigma''(x) = \sigma'(x) \in \mathbb{N}$$

Gilt, daher ist $\forall x \exists y P(x, s(y))$ wahr in dieser Interpretation.

$\forall x \exists y P(x, s(y))$ ist falsch

... falls wir $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $I(s)(n) := n + 1$ und $I(P)(m, n) := (m = n)$ wählen (Variablenbelegungen σ beliebig):

$$\text{val}_{I, \sigma}(\forall x \exists y P(x, s(y))) = 1$$

$$\iff \text{val}_{I, \sigma'}(\exists y P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \text{val}_{I, \sigma''}(P(x, s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff I(P)(\text{val}_{I, \sigma''}(x), \text{val}_{I, \sigma''}(s(y))) = 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \\ \text{und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

$$\iff \sigma''(x) = \sigma''(y) + 1 \quad \text{für mind. ein } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma' \text{ und alle } \sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$$

Problem: Für $\sigma''(x) = \sigma'(x) = 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung in \mathbb{N} :

$$\sigma''(x) \neq \sigma''(y) + 1 \quad \text{für alle } \sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$$

$\forall x \exists y P(x, s(y))$ ist daher falsch in dieser Interpretation.

Auf dem Spielplatz

$$\mathcal{P} = \{Vater/1, Kind/1, SpieltMit/2\}$$

$$\mathcal{F} = \{albrecht/0, frieda/0\}$$

$$\mathcal{U} = \{Albrecht, Bogdan, Erich, Frieda, Kathrin, Nina, Tamara\}$$

$$I(Vater) = \{Bogdan, Erich\}$$

$$I(Kind) = \{Albrecht, Frieda, Nina\}$$

$$I(SpieltMit) = \{(Albrecht, Frieda), (Bogdan, Albrecht), \\ (Erich, Albrecht), (Erich, Frieda), \\ (Frieda, Nina), (Frieda, Kathrin), (Frieda, Albrecht), (Nina, Frieda), \\ (Tamara, Erich), (Tamara, Bogdan), (Tamara, Albrecht)\},$$

$$I(albrecht) = \text{Albrecht}$$

$$I(frieda) = \text{Frieda}$$

$$\forall x (Vater(x) \supset \exists y (Kind(y) \wedge SpieltMit(x, y)))$$

„Alle Väter spielen mit (mindestens) einem Kind.“

Wahr in I , da Vater Bogdan mit Kind Albrecht und Vater Erich mit Kind Frieda spielt.

Auf dem Spielplatz

$$\mathcal{P} = \{Vater/1, Kind/1, SpieltMit/2\}$$

$$\mathcal{F} = \{albrecht/0, frieda/0\}$$

$$\mathcal{U} = \{Albrecht, Bogdan, Erich, Frieda, Kathrin, Nina, Tamara\}$$

$$I(Vater) = \{Bogdan, Erich\}$$

$$I(Kind) = \{Albrecht, Frieda, Nina\}$$

$$I(SpieltMit) = \{(Albrecht, Frieda), (Bogdan, Albrecht), \\ (Erich, Albrecht), (Erich, Frieda), \\ (Frieda, Nina), (Frieda, Kathrin), (Frieda, Albrecht), (Nina, Frieda), \\ (Tamara, Erich), (Tamara, Bogdan), (Tamara, Albrecht)\},$$

$$I(albrecht) = \text{Albrecht}$$

$$I(frieda) = \text{Frieda}$$

$$\forall x (Vater(x) \wedge SpieltMit(x, albrecht))$$

„Alle sind Väter und spielen mit Albrecht.“

Falsch in I , da etwa Albrecht kein Vater ist.

Auf dem Spielplatz

$$\mathcal{P} = \{Vater/1, Kind/1, SpieltMit/2\}$$

$$\mathcal{F} = \{albrecht/0, frieda/0\}$$

$$\mathcal{U} = \{\text{Albrecht, Bogdan, Erich, Frieda, Kathrin, Nina, Tamara}\}$$

$$I(Vater) = \{\text{Bogdan, Erich}\}$$

$$I(Kind) = \{\text{Albrecht, Frieda, Nina}\}$$

$$I(SpieltMit) = \{(\text{Albrecht, Frieda}), (\text{Bogdan, Albrecht}), \\ (\text{Erich, Albrecht}), (\text{Erich, Frieda}), \\ (\text{Frieda, Nina}), (\text{Frieda, Kathrin}), (\text{Frieda, Albrecht}), (\text{Nina, Frieda}), \\ (\text{Tamara, Erich}), (\text{Tamara, Bogdan}), (\text{Tamara, Albrecht})\},$$

$$I(albrecht) = \text{Albrecht}$$

$$I(frieda) = \text{Frieda}$$

$$\exists x (Kind(x) \wedge \forall y (Kind(y) \supset SpieltMit(x, y)))$$

„Es gibt (mindestens) ein Kind, das mit allen Kindern spielt.“

Falsch in I , da Albrecht nicht mit Nina, Frieda nicht mit Frieda und Nina nicht mit Albrecht spielt.

Auf dem Spielplatz

$$\mathcal{P} = \{Vater/1, Kind/1, SpieltMit/2\}$$

$$\mathcal{F} = \{albrecht/0, frieda/0\}$$

$$\mathcal{U} = \{\text{Albrecht, Bogdan, Erich, Frieda, Kathrin, Nina, Tamara}\}$$

$$I(Vater) = \{\text{Bogdan, Erich}\}$$

$$I(Kind) = \{\text{Albrecht, Frieda, Nina}\}$$

$$I(SpieltMit) = \{(\text{Albrecht, Frieda}), (\text{Bogdan, Albrecht}), \\ (\text{Erich, Albrecht}), (\text{Erich, Frieda}), \\ (\text{Frieda, Nina}), (\text{Frieda, Kathrin}), (\text{Frieda, Albrecht}), (\text{Nina, Frieda}), \\ (\text{Tamara, Erich}), (\text{Tamara, Bogdan}), (\text{Tamara, Albrecht})\},$$

$$I(albrecht) = \text{Albrecht}$$

$$I(frieda) = \text{Frieda}$$

$$\forall x (SpieltMit(x, frieda) \not\equiv SpieltMit(x, albrecht))$$

„Alle spielen entweder mit Frieda oder Albrecht (aber nicht mit beiden).“

Falsch in I , da Erich sowohl mit Frieda als auch mit Albrecht spielt.

Eine Formel F heißt

- **erfüllbar**, wenn $\text{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man **Modell** von F);
- **widerlegbar**, wenn $\text{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für mindestens ein I und ein σ (I und σ nennt man **Gegenbeispiel** oder **Gegenmodell** zu F);
- **unerfüllbar**, wenn $\text{val}_{I,\sigma}(F) = 0$ für alle I und alle σ ;
- **(allgemein)gültig**, wenn $\text{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und alle σ (F nennt man in diesem Fall auch **Tautologie**).

Äquivalenz, Konsequenz und Gültigkeit

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent**, geschrieben $F = G$, wenn $\text{val}_{I,\sigma}(F) = \text{val}_{I,\sigma}(G)$ für alle I und alle σ gilt.

$F_1, \dots, F_n \models_{I,\sigma} G$:

„Aus $\text{val}_{I,\sigma}(F_1) = \dots = \text{val}_{I,\sigma}(F_n) = 1$ folgt $\text{val}_{I,\sigma}(G) = 1$.“

Logische Konsequenz

$F_1, \dots, F_n \models G$: $F_1, \dots, F_n \models_{I,\sigma} G$ gilt für alle I und σ .

Die Formeln F und G sind äquivalent ($F = G$) genau dann, wenn $F \equiv G$ eine gültige Formel ist.

$F_1, \dots, F_n \models G$ genau dann, wenn $(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \supset G$ gültig.

Wichtige Äquivalenzen

Neben den aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch noch folgende:

$$\neg \forall x F = \exists x \neg F$$

$$\neg \exists x F = \forall x \neg F$$

Dualität von \forall und \exists

$$\forall x F[x] = \forall y F[y]$$

$$\exists x F[x] = \exists y F[y]$$

Umbenennung gebundener Variablen
(sofern y nicht bereits in F vorkommt)

$$\forall x \forall y F = \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F = \exists y \exists x F$$

Vertauschung gleichartiger Quantoren

$$\forall x (F \wedge G) = \forall x F \wedge \forall x G$$

$$\exists x (F \vee G) = \exists x F \vee \exists x G$$

Distributivität \forall/\wedge

Distributivität \exists/\vee

Falls x nicht frei in F vorkommt, gilt außerdem:

$$\forall x F = F \quad \exists x F = F$$

$$\forall x (F \vee G) = F \vee \forall x G$$

$$\exists x (F \wedge G) = F \wedge \exists x G$$

Distributivität \forall/\vee

Distributivität \exists/\wedge

Das Lügner-Paradoxon

Ich behaupte: „Ich lüge!“ – Sage ich die Wahrheit?

Wenn ich die Wahrheit sage, ist „Ich lüge“ richtig,
d.h., ich sage nicht die Wahrheit. – **Widerspruch!**

Wenn ich nicht die Wahrheit sage, ist „Ich lüge“ falsch,
d.h., ich sage die Wahrheit. – **Widerspruch!**

Das Kreter-Halbparadoxon

Der Kreter Epimenides behauptet: „Alle Kreter lügen!“.
Sagt Epimenides die Wahrheit?

Wenn ja, lügen alle Kreter, also auch er. – **Widerspruch!**

Wenn nein, ist es falsch, dass alle Kreter lügen.

Trugschluss: „Alle Kreter sagen die Wahrheit!“ (Also auch Epimenides?)

Richtig: Es gibt mindestens einen aufrichtigen Kreter. **Kein Widerspruch.**

Falsch: $\neg\forall = \forall\neg$

Richtig: $\neg\forall = \exists\neg$

Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik

Gültigkeitsproblem

Gegeben: prädikatenlogische Formel F

Frage: Ist F gültig, d.h., gilt $\text{val}_{I,\sigma}(F) = 1$ für alle I und σ ?

Viele praktische Aufgaben lassen sich als Probleme der Prädikatenlogik formulieren, wie z.B.

- Verifikation von Software
- Wissensrepräsentation

Die meisten prädikatenlogischen Fragen lassen sich als Gültigkeitsproblem formulieren.

Problem: Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Das bedeutet:

- Ist die Formel gültig, lässt sich mit verschiedenen Methoden ein Beweis finden (kann allerdings beliebig lange dauern).
- Ist die Formel nicht gültig, lässt sich das mit keiner Methode zuverlässig feststellen. Beweiser terminieren in diesem Fall oft nicht. 40

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
4. Endliche Automaten
5. Reguläre Sprachen
6. Kontextfreie Grammatiken
7. **Prädikatenlogik**
 - 7.1. Motivation
 - 7.2. Terme
 - 7.3. Syntax
 - 7.4. Semantik
 - 7.5. **Modellierung**
8. Petri-Netze

Wahl der Prädikatenstelligkeit

Max liest Zeitung.

Nullstelliges Prädikat (Aussagenvariable):

Max_liest_Zeitung

Einstelliges Prädikat:

Liest_Zeitung(max)

Zweistelliges Prädikat:

Liest(max, zeitung)

Die beste Wahl hängt von den Umständen ab.

Wähle ein eigenes Symbol für Satzteile, die öfter auftreten (können).

Zeit-, Eigenschafts- und Hauptwörter

Sokrates ist sterblich.

Möglichkeit 1: Hauptwort wird zum Prädikat.

Sokrates_ist(sterblich)

Möglichkeit 2: Zeit-/Eigenschaftswort wird zum Prädikat.

Ist_sterblich(sokrates)

Die zweite Möglichkeit ist fast immer die richtige.

Mache Zeitwörter bzw. Eigenschaften zu Prädikatensymbole und Hauptwörter zu ihren Argumenten.

Fürwörter (Pronomen)

Persönliche Fürwörter (ich, du, er, sie, es, ...) oder **bezügliche Fürwörter** (der, welcher, ...) vermeiden Wiederholungen und stellen Bezüge her.

Mia liebt Max, der wiederum sie liebt.

Umformung in

Mia liebt Max und Max liebt Mia.

ergibt die Formel

$Liebt(mia, max) \wedge Liebt(max, mia)$

Ersetze Fürwörter durch Namen. Wiederhole Satzteile, die durch Fürwörter ersetzt wurden.

Unbestimmte Fürwörter wie „nichts“ ziehen Subjekt/Objekt und Negation zusammen.

Nichts währt ewig.

Trenne Verneinung und Subjekt:

Es existiert nicht etwas, das ewig währt.

Ergibt die Formel

$\neg \exists x \text{ W\"ahrt_ewig}(x)$

Ich kann nichts sehen.

$\neg \exists x \text{ Kann_sehen}(\text{gernot}, x)$

Führe Variablen für unbestimmte Fürwörter ein.

Mache Negationen explizit.

Fürwörter und Bindewörter

Vor mir ist etwas Großes, und es ist hungrig.

Die zwei Teilsätze können nicht getrennt behandelt werden: „es“ bezieht sich auf „etwas Großes“. Die entsprechende Variable muss überall dieselbe sein.

Es gibt etwas, das vor mir ist, das groß ist, und das hungrig ist.

$\exists x (\text{Befindet_sich_vor}(x, \text{gernot}) \wedge \text{Groß}(x) \wedge \text{Hungrig}(x))$

Erstrecken sich die Bezüge von Fürwörtern über Bindewörter hinweg, behandle die Fürwörter vor den Bindewörtern.