UE Mathematik 3, 2.. Runde am 27.10.2006

8.) Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1+x^3)y' - x^2 y = 0, \qquad y(1)=2$$

Diese DGL lässt sich leicht mittels Trennung der Variablen umformulieren:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx \left| \begin{matrix} 1+x^3 = u \\ 3x^2 = \frac{du}{dx} \end{matrix} \right| \Rightarrow \int \frac{\cancel{x^2}}{u} \cdot \frac{1}{3\cancel{x^2}} dx = \frac{1}{3}\ln|u| = \frac{1}{3}\ln|1+x^3|$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + \tilde{C} \Rightarrow y(x) = C\cdot\sqrt[3]{1+x^3}$$

$$y(1)=2 \Rightarrow 2 = C\cdot\sqrt[3]{1+1^3} \Rightarrow C = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \underline{y(x) = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}}}$$

9.) Gegeben ist die DGL

$$(x^2-1)y' = y$$

(a) Man bestimme die vollständige Lösung dieser DGL.

(b) Für welche Anfangswerte (x_0, y_0) ist das zugehörige Anfangswertproblem $y(x_0)=y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar, welche Voraussetzungen des EE-Satzes sind dabei verletzt?

(a) Auch wieder mittels Trennung der Variablen arbeiten:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + \tilde{C}$$

$$\underline{y(x) = C\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Hier braucht man zusätzlich noch Partialbruchzerlegung, wer nicht mehr weiß, wie das geht: Mathe 2 nachschauen!

(b) nicht lösbar für $(1, y\neq 0)$ bzw. $(-1, y_0)$; $y' = f(x,y)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$

10.) Man ermittle für die DGL

$$4xy + 3xy^4 + (2x^2 + 5xy^3)y' = 0$$

Konstante α und β, sodass der Integrierende Faktor $M(x,y) = x^\alpha y^\beta$ diese DGL in eine exakte überführt und gebe sodann die allgemeine Lösung derselben an.

Keine Hexerei, A und B mit $M(x,y)$ multiplizieren, anschließend partiell ableiten und gleichsetzen:

$$U_X = M\cdot A = 4x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 3x^\alpha y^{\beta+4}$$

$$U_Y = M\cdot B = 2x^{\alpha+2}y^\beta + 5x^{\alpha+1}y^{\beta+3}$$

$$U_{XY} = U_{YX} \Rightarrow 4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta + 3(\beta+4)x^\alpha y^{\beta+3} = 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta + 5(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+3}$$

Nun sieht man schon, dass die linke und die rechte Seite sehr ähnlich ausschauen, man braucht eigentlich nur noch einen Koeffizientenvergleich machen und das Gleichungssystem lösen:

$$4(\beta+1)=2(\alpha+2)$$
$$3(\beta+4)=5(\alpha+1)$$
$$\alpha=2;\beta=1\Rightarrow U_X=4x^3y^2+3x^2y^5, U_Y=2x^4y+5x^3y^4$$
$$\underline{U(x,y)=x^4y^2+x^3y^5+C}$$

11.) Für welche Werte von y_0 ist das AWP $xy'+2y=3x, y(0)=y_0$ lösbar? Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

$$y_h(x):\ y'+2\frac{y}{x}=0\Rightarrow \ln|y|=-2\ln|x|+\tilde{C}\Rightarrow y_h(x)=\frac{C}{x^2}$$
$$y_p(x):\ \frac{c'(x)}{x^2}=3\Rightarrow c(x)=x^3\Rightarrow y_p(x)=x$$
$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\frac{C}{x^2}+x}$$

$y(0)=0$ wenn $C=0\Rightarrow y(x)=x$ bzw. $y(x)=0$

12.) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli DGL:

$$y'+y=(\cos x-\sin x)y^2$$

Am Anfang einfach einmal in die Formel einsetzen und danach ganz normal lösen:

$$u(x)=y(x)^{-1}=\frac{1}{y(x)}\ \Rightarrow\ u'-u=\sin x-\cos x$$
$$u_h(x):\ u'-u=0\Rightarrow u_h(x)=C\cdot e^x$$

Soweit zur homogenen Lösung, bei der partikulären müssen wir uns eines Tricks zur Lösung des Integrals bedienen, prinzipiell mit partieller Integration:

$$c'(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)\ \Rightarrow\ c(x)=\int e^{-x}(\sin x-\cos x)\,dx=$$
$$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)-\int -e^{-x}(\cos x+\sin x)\,dx=$$
$$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\cos x+\sin x)-\underbrace{\int -e^{-x}(-\sin x+\cos x)}_{=\int e^{-x}(\sin x-\cos x)=c(x)}$$
$$\Rightarrow 2\cdot c(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\ \Rightarrow\ c(x)=-e^{-x}\sin x$$
$$u_p(x)=u_h(x)\cdot c(x)=e^x\cdot(-e^{-x})\sin x=-\sin x$$
$$\Rightarrow \underline{y(x)=\frac{1}{C\cdot e^x-\sin x}}$$

13.) Man löse das AWP $y(1)=1$ für folgende Ähnlichkeitsdifferentialgleichung:

$$y'=\frac{y(y+x)}{x^2}$$

Im Prinzip nicht schwierig, Gleichnung ein wenig umformulieren, in die Formel einsetzen, lösen:

$$y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{yx}{x^2}=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}$$
$$v(x)=\frac{y(x)}{x}\ \Rightarrow\ y=x\cdot v\ \Rightarrow\ y'=v+x\cdot v'$$

$$v+x\cdot v'=v^2+v \quad \Rightarrow v'=\frac{1}{x}\cdot v^2$$

Schön umformuliert, jetzt müssen wir allerdings weiter substituieren, nämlich nach der Bernoulli-Formel:

$$u(x)=v^{-1}=\frac{1}{v}$$

$$u'=-\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; u(x)=-\ln|x|+C \;\Rightarrow\; v(x)=-\frac{1}{\ln|x|+C}$$

$$y(x)=-\frac{x}{\ln|x|+C}, \quad y(1)=1 \;\Rightarrow\; 1=-\frac{1}{\ln|1|+C}=-\frac{1}{C} \;\Rightarrow\; C=-1$$

$$\underline{y(x)=-\frac{x}{\ln|x|-1}}$$

14.) Das logistische Gesetz für das Wachstum einer Population im beschränkten Lebensraum lautet

$$\dot{x}=(a-bx)x \quad \text{, für} \quad a,b>0$$

Man löse das AWP $x(t_0)=x_0$ und bestätige, dass $\lim_{t\to\infty} x(t)=\frac{a}{b}$ für $x_0>0$.

Angabe klingt schwieriger, als es ist, im Prinzip eine relativ einfache DGL:

$$\dot{x}-ax=-bx^{2,} \quad u(t)=\frac{1}{x(t)} \;\Rightarrow\; u'+au=b$$

$$u_h(t){:}\; u'=-au \;\Rightarrow\; u_h(t)=\tilde{C}\cdot e^{-at}$$

$$u_p(t){:}\; c'(t)=b\cdot e^{at} \;\Rightarrow\; c(t)=\frac{b}{a}\cdot e^{at}$$

$$u_p(t)=c(t)\cdot u_h(t)=\frac{b}{a}\cdot e^{at}\cdot e^{-at}=\frac{b}{a}$$

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t)=\tilde{C}\cdot e^{-at}+\frac{b}{a}$$

$$\underline{x(t)=\frac{1}{u(t)}=\frac{1}{C\cdot e^{-at}+\frac{b}{a}}}$$

So, jetzt sieht man schon schön:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{C\cdot e^{-at}+\frac{b}{a}}=\frac{1}{C\cdot 0+\frac{b}{a}}=\underline{\frac{a}{b}}$$