Zweiter Test aus „Operations Research"

(Stoff Wintersemester 20009/10)

27.01.2010

1. Eine Kaufhauskette unterhält in einer Region drei Warenlager mit je 8 Einheiten Kapazität und hat 4 Geschäfte mit wöchentlicher Nachfrage von 5, 5, 4 bzw. 10 Einheiten. Die Transportkosten pro Einheit von den einzelnen Warenlagern zu den einzelnen Geschäften sind durch die folgende Matrix gegeben:

5	4	4	5
6	7	1	2
4	2	3	1

   Lösen Sie das obige Transportproblem mit Hilfe des Primal-Dual (α-β)-Verfahrens.

2. Mittels Verfahren der zulässigen Richtungen lösen Sie das folgende Problem:

$$\min \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

   sodass

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

   und

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

   Als Startbedingung ist $(1, 1)$ zu wählen.

1. Primal-Dual Verfahren – Transportmatrix

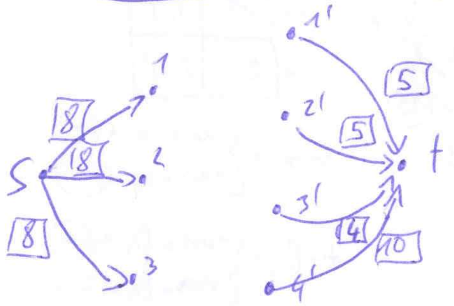
27.01.2010
2. Test
WS 09/10

(I)

geg. Transportmatrix

	(1')	(2')	(3')	(4')	
(1)	5	4	4	5	8
(2)	6	7	1	2	8
(3)	4	2	3	1	8
	5	5	4	10	

1. Schritt: Graph

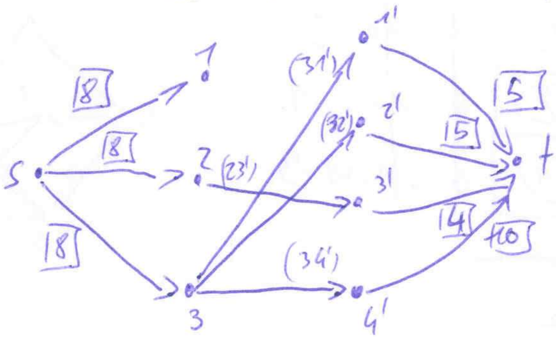


2. Schritt: Spaltenminima

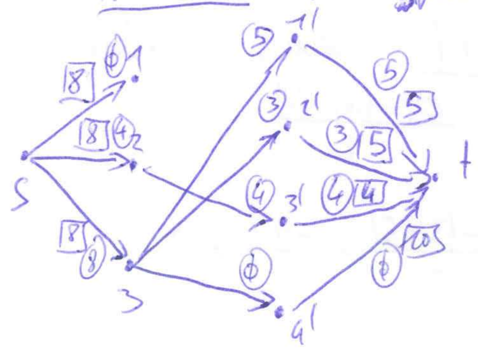
	(1')	(2')	(3')	(4')	α_i
(1)	5	4	4	5	ϕ
(2)	6	7	1	2	ϕ
(3)	4	2	3	1	ϕ
β_j	4	2	1	1	

3. Schritt: Graph + aktive Indizes (IJ)

$IJ = \{(23'), (31'), (32'), (34')\}$



4. Schritt: Transportkosten



	s	t
m	1,2	1',3'
¬m	3	2',4'

$s = \alpha_i = \begin{cases} m = \alpha_i + \Theta \\ \neg m = \alpha_i - \Theta \end{cases}$

$t = \beta_j = \begin{cases} \neg m = \beta_j + \Theta \\ m = \beta_j - \Theta \end{cases}$

5. Schritt: neues Spaltenminimum

$\min = \dfrac{c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)}{2}$

$(12') = \dfrac{4-(0+2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$(14') = \dfrac{5-(0+1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$(22') = \dfrac{7-(0+2)}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$(24') = \dfrac{2-(0+1)}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

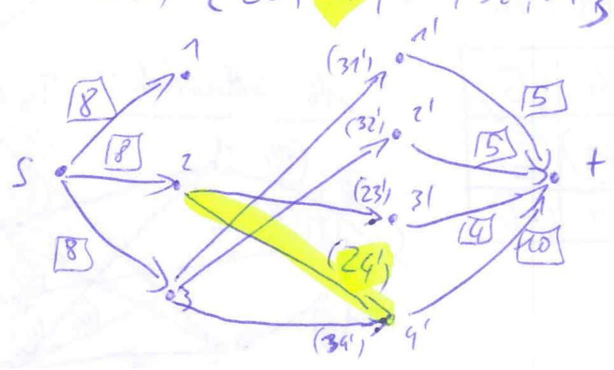
$\boxed{\text{Schrittweite} \Rightarrow \Theta_1^* = 1}$

6. Schritt: neues Spaltenminimum

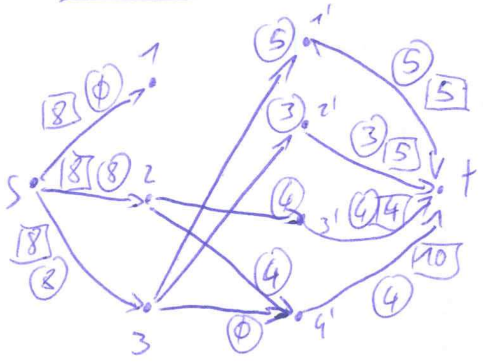
	(1')	(2')	(3')	(4')	α_i	α_i
(1)	5	4	4	5	~~ϕ~~	1
(2)	6	7	1	2	~~ϕ~~	1
(3)	4	2	3	1	~~ϕ~~	-1
β_j	~~4~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~		
β_j	3	3	0	2		

7. Schritt Graph + akt. Indizes (IJ)

$IJ = \{23', 24', 31', 32', 34'\}$



8. Schritt: Transportmatrix



	s	t
m	1	1',3'
¬m	2,3	2',4'

$s = \alpha_i = \begin{cases} m = \alpha_i + \Theta \\ \neg m = \alpha_i - \Theta \end{cases}$

$t = \beta_j = \begin{cases} \neg m = \beta_j + \Theta \\ m = \beta_j - \Theta \end{cases}$

9. Schritt: neue Spaltenmin.

$\min = \frac{c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)}{2}$

$(12') = \frac{4 - (1+3)}{2} = \frac{0}{2} = \emptyset$

$(14') = \frac{5 - (1+2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

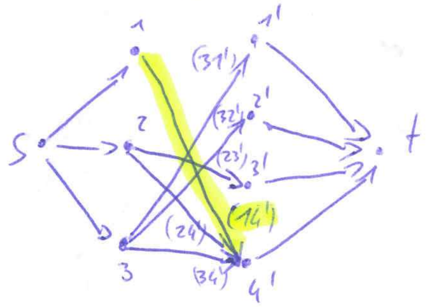
$\boxed{\text{Schrittweite} \Rightarrow \Theta_1^* = 2}$

10. Schritt: neues Spaltenmin.

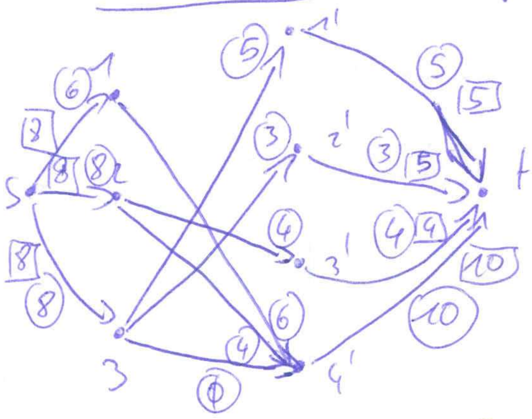
	(1')	(2')	(3')	(4')	α_i	α_i	α_i
(1)	5	4	4	5	0	1 (1+2)	3
(2)	6	7	1	2	0	1 (1-2)	-1
(3)	4	2	3	1	0	-1 (-1-2)	-3
β_j	~~4~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~			
β_j	~~3~~ (3-2)	~~3~~ (3+2)	~~0~~ (0-2)	~~2~~ (2+2)			
β_j	1	5	-2	4			

11. Schritt: Graph + akt. IJ

$IJ = \{14', 23', 24', 31', 32', 34'\}$



12. Schritt: Transportkosten



	s	t
m	1	1',3',4'
¬m	2,3	2'

13. Schritt neues Spaltenmin.

$\min = \frac{c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)}{2}$

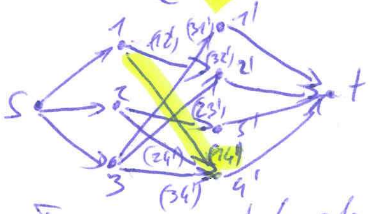
$(12') = \frac{4 - (3+5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

14. Schritt neues Spaltenmin.

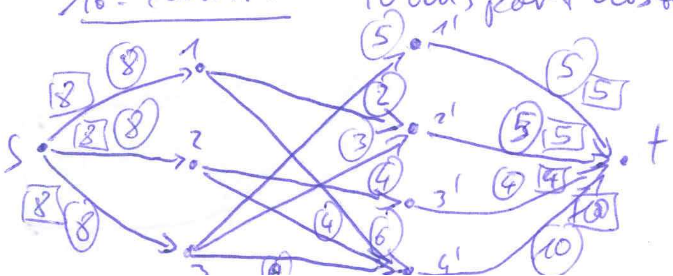
	(1')	(2')	(3')	(4')
(1)	5	4	4	5
(2)	6	7	1	2
(3)	4	2	3	1

15. Schritt: Graph + akt. IJ

$IJ = \{12', 14', 23', 24', 31', 32', 34'\}$



16. Schritt: Transportkosten



DBPP & BPP optimal

ENDE

27.01.2010
2. Test
WS 09/10

II

2) Methode der zulässigen Richtungen

geg: $\min (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2$

NB: (1) $x_1 + x_2 \leq 2$

(2) $x_1 \geq 0$

(3) $x_2 \geq 0$

Startbedingung = SB(1,1)

1. Schritt:

$\max -(x_1-4)^2 - (x_2-3)^2$

NB: (1) $x_1 + x_2 \leq 2$

(2) $-x_1 \leq 0$

(3) $-x_2 \leq 0$

2. Schritt: SB(1,1) => I(1,1) -> in NB einsetzen

NB: $\boxed{(1)\ x_1 + x_2 \leq 2 \Rightarrow 1+1 = 2}$ aktiv (da w.A + Gleichung)

(2) $-x_1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$ inaktiv

(3) $-x_2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$ inaktiv

$I(1,1) = \{1\}$
aktive Indizes

3. Schritt: Ableiten der max. Funktion

$\bar{\nabla}_f = (-2(x_1-4)\cdot(1),\ -2\cdot(x_2-3)\cdot(1)) \Leftarrow I(\underset{x_1}{1},\underset{x_2}{1})$ einsetzen

$\bar{\nabla}(1,1) = (-2\ (1-4),\ -2\ (1-3)) = (-2\ (-3),\ -2(-2)) =$

$\bar{\nabla}(1,1) = (6, 4)$

4. Schritt: $\bar{\nabla}(1,1) \Rightarrow \max\ 6s_1 + 4s_2$

+ NB (1) $s_1 + s_2 \leq 0$

$+ |s_i| \leq 1$ <- Diese Bedingung schränkt den zu untersuchenden Graphen auf ein min. Quadrat ein.

5. Schritt: Eckpunkte mit Randgeraden -> in aktive NB einsetzen

(0,0) = $0+0 \leq 0$ w.A.
(0,1) = $0+1 \leq 0$ f.A.
(1,0) = $1+0 \leq 0$ f.A.
(1,1) = $1+1 \leq 0$ f.A.
(0,-1) = $0-1 \leq 0$ w.A.
(-1,0) = $-1+0 \leq 0$ w.A.
(-1,1) = $-1+1 \leq 0$ w.A.
(1,-1) = $1-1 \leq 0$ w.A.
(-1,-1) = $-1-1 \leq 0$ w.A.

6. Schritt: Eckpkt. mit max. Größe => in $\boxed{\max\ 6s_1 + 4s_2}$ einsetzen

$s_1\ s_2$

$(0,0) = 0+0 = 0$

$(0,-1) = 0-4 = -4$

$(-1,0) = -6+0 = -6$

$(-1,1) = -6+4 = -2$

$\boxed{(1,-1) = 6-4 = 2}$ => Maximalwert -> $S(1,-1)$ = Lokal beste Richtung

$(-1,-1) = -6-4 = -10$

7. Schritt: Schrittweite bestimmen

$$x_{neu} = x_{alt} + \mu \cdot s$$

$$x = (1,1) + \mu \cdot (1,-1) = (1,1) + (\mu, -\mu) = (1+\mu, 1-\mu)$$

$$x = (1+\mu, 1-\mu)$$

μ' => inaktive NB => $a_i \cdot s > 0$

(2) $-x_1 \leq 0 \Rightarrow a_2 \cdot s \Rightarrow (a_2x_1, a_2x_2) \cdot \begin{pmatrix} s_{x1} \\ s_{x2} \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 > 0$ f. A.

(3) $-x_2 \leq 0 \Rightarrow a_3 \cdot s \Rightarrow (a_3x_1, a_3x_2) \cdot \begin{pmatrix} s_{x1} \\ s_{x2} \end{pmatrix} \Rightarrow (0,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 > 0$ w. A.

$$\boxed{\mu' = \min \left\{ \frac{b_i - a_i x}{a_i \cdot s} \right\}} = \frac{0 - (0,-1) \cdot \binom{1}{1}}{1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\mu' = 1}$$

μ'' => (x_1, x_2) => $(1+\mu, 1-\mu)$ => einsetzen in $\max -(x_1-4)^2 - (x_2-3)^2$

$$\tilde{f} = -((1+\mu)-4)^2 - ((1-\mu)-3)^2 = -(\mu-3)^2 - (-\mu-2)^2 =$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -2 \cdot (\mu-3) \cdot (1) - (2(-\mu-2) \cdot (-1)) = -2\mu+6 - ((-2\mu-4) \cdot (-1)) =$$

$$= -2\mu+6 - (2\mu+4) = -2\mu+6-2\mu-4 = -4\mu+2 =$$

$$-4\mu = -2 \quad /:(-4)$$

$$\boxed{\mu'' = \frac{1}{2}}$$

Optimale Schrittweite (μ): $\mu = \min\{\mu', \mu''\} = \min\{1, \frac{1}{2}\} \Rightarrow$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2}}$$

neue zulässige Lösung: $x = (1+\mu, 1-\mu) = (1+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$$x = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2) Methode der zulässigen Richtungen

27.01.2010
2. Test
WS 09/10

III

8. Schritt: $x\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ in NB einsetzen

NB: $\boxed{(1)\ x_1 + x_2 \leq 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2}$ aktiv (da w.A. + Gleichung)

(2) $-x_1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 0$ inaktiv

(3) $-x_2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 0$ inaktiv

$I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{1\}$
aktive Indizes

9. Schritt Ableiten d. $\max -(x_1-4)^2 - (x_2-3)^2$

$\overline{V}_f = (-2(x_1-4)\cdot(1), -2(x_2-3)\cdot(1)) =$ ← $I\left(\underset{x_1}{\frac{3}{2}}, \underset{x_2}{\frac{1}{2}}\right)$ einsetzen

$\overline{V}f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-2\cdot\left(\frac{3}{2}-4\right), -2\left(\frac{1}{2}-3\right)\right) = \left(-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right), -2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right) =$

$= \left(\frac{10}{2}, \frac{10}{2}\right) = (5, 5)$

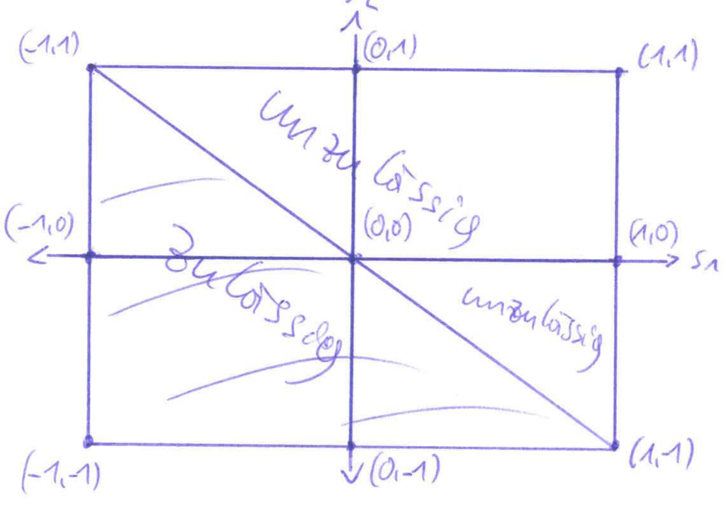
$\overline{V}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = (5, 5)$

10. Schritt: $\overline{V}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \max 5s_1 + 5s_2$

$+$ NB (1) $s_1 + s_2 \leq 0$
$+ |s_i| \leq 1$ ← Diese Bedingung schränkt den zu untersuchenden Graphen auf ein min. Quadrat ein.

11. Schritt: Eckpkte mit Randgeraden → in akt. NB einsetzen

$(0,0) = 0+0 \leq 0$ w.A.
$(0,1) = 0+1 \leq 0$ f.A.
$(1,0) = 1+0 \leq 0$ f.A.
$(1,1) = 1+1 \leq 0$ f.A.
$(0,-1) = 0-1 \leq 0$ w.A.
$(-1,0) = -1+0 \leq 0$ w.A.
$(1,-1) = 1-1 \leq 0$ w.A.
$(-1,1) = -1+1 \leq 0$ w.A.
$(-1,-1) = -1-1 \leq 0$ w.A.



12. Schritt: Eckpunkt mit max. Größe

./.

12. Schritt: Eckpkt. mit max. Größe → in $\boxed{\max.\ 5s_1+5s_2}$ einsetzen

$(0,0) = 0+0 = 0$
$(0,-1) = 0-5 = -5$
$(-1,0) = -5+0 = -5$
$(1,-1) = 5-5 = 0$
$(-1,1) = -5+5 = 0$
$(-1,-1) = -5+5 = -10$

lokal beste Richtung

Da die lokal beste Richtung $(0,0)$ ist, haben wir bereits $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ als optimale Lösung der nachfolgenden Aufgabe bestimmt:

$$\min\ (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$