Runde 2, Beispiel 9

LVA 118.181, Übungsrunde 2, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 25.10.2006

1 Angabe

Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = x_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Vorraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

2 Theoretische Grundlagen: Trennbare Differentialgleichungen

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

   $$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion $(x, x_0 \in I,\ y, y_0 \in J)$:

   $$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta$, $x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen $(x_0 \in I,\ y_0 \in J)$ besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder

2. $|g(y)| < L \cdot |y - y0|$ in einer Umgebung von y_0, $L > 0$ konstant (`Lipschitz`).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung

2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\,dx.$$

Allgemeine implizite Lösung lautet:

$$G(y) - F(x) = x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c - 0$ nach y auflösen.

Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

3 Theoretische Grundlagen: Partialbruchzerlegung

Eine echt gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ kann unter Verwendung der Linearfaktorenzerlegung des Nennerpolynoms mit

$$q_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \tag{1}$$

in die Partialbruchdarstellung

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

überführt werden. Im allgemeinen Fall fhrt die Zerlegung in Linearfaktoren auf Terme der Form

$$(x - x_i)^n \qquad \text{bzw} \qquad (x^2 + px + q)^n \text{ mit } n \geq 1.$$

Dabei sind die Terme jeweils n mal zu berücksichtigen. Der Partialbruchansatz lautet jeweils

$$\frac{A_i}{x - x_i} + \frac{A_{i+1}}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i+n-1}}{(x - x_i)^n}$$
$$\frac{A_i + A_{i+1}}{x^2 + px + q} + \frac{A_{i+2} + A_{i+3}}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_{i+2(n-1)} + A_{i+2n-1}}{(x^2 + px + q)^n}$$

Der Partialbruchansatz für $f(x)$ ergibt sich aus der Summe der Partialbruchansätze aller Linearfaktoren.
Die Bestimmung der Koeffizienten $A_1,A_2,\ldots,A_n$ erfolgt z.B. durch die **Methode des Koeffizientenvergleichs**.

1. Zerlegung des Nenners $q(x)$ in Linearfaktoren
2. Aufstellen des Partialbruchansatzes von $f(x)$ wie oben angeführt
3. Gleichsetzen der Ausgangsfunktion $f(x)$ mit dem Partialbruchansatz und Erweitern der Gleichung mit $q(x)$
4. Ausmultiplizieren des Partialbruchansatzes und Sortieren der Potenzen nach x
5. Aufstellen der Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten $A_1,A_2,\ldots,A_n$durch Gleichsetzen der Koeffizienten beider Seiten der Gleichung gleicher Potenzen von x.

4 Lösung des Beispiels

4.1 Umformung für Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}(x^2-1)y' &= y\\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

4.2 Unbestimmte Integration beider Seiten

Integration der linken Seite:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Integration der rechten Seite:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Entweder man führt die Partialbruchzerlegung durch und erhält:

$$\frac{1}{2}\cdot\int(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1})\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}+\tilde{C}$$

Oder man betrachtet die folgende Regel und formt entsprechend um (x und 1 vertauscht!):

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}+c$$

Das Endergebnis ist dann (Allgemeine Lösung):

$$\mathbf{y(x) = C\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

4.3 Anfangswerte, die mit EE-Satz kollidieren

1. Nicht lösbar für $(1, y \leq 0)$ bzw. $(-1, y_0)$
2. $y' = f(x, y)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$