Runde 4, Beispiel 22

LVA 118.181, Übungsrunde 4, 10.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 11.11.2006

1 Angabe

Man suche mittels Potenzreihenansatz um $x = 0$ die Werte von λ für welche die Differentialgleichung

$$y'' - xy' + \lambda y = 0$$

polynomielle Lösungen besitzt.
Anmerkung: Es lässt sich zeigen (ist hier aber nicht verlangt), dass die Polynome darstellbar sind durch konstante Vielfache der Hermite-Polynome

$$y_n(x) = e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

1.1 Theoretische Grundlagen: Potenzreihenansatz zur Lösung von Differentialgleichungen

Es liegt eine Differentialgleichung in folgender Form vor:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)} = 0,$$

und wir nehmen an, dass die Lösung $x_0 = x$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h.:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ kann auf zwei Arten erfolgen:

1.2 Fortgesetzte Differentiation

Ausgangspunkt ist das AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Mit der Taylor-Formel gilt:

$$a_m = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!},$$

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ bei $x = x_0$ (Kettenregel) bestimmt man nacheinander die Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y(x_0) = y_0 \\
a_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) \\
2!a_2 &= y''(x_0) = f_x(y_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) \\
3!a_3 &= y'''(x_0) = [f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx} + f_{yy})y' + f_y y'']_{x_0,y_0} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1.3 Koeffizizentenvergleich

1. Ableitungen bilden:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}
\end{aligned}
$$

2. Potenzen von $y(x)$ $((y(x))^2, (y(x))^3, \dots)$ nach der Cauchy-Produktformel entwickeln:

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot (x - x_0)^n
$$

$$
h(x) := f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{h_n}_{h_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot g_{n-k}} \cdot (x - x_0)^n
$$

3. Reihenentwicklung in Differentialgleichung einsetzen und nach Potenzen von $(x - x_0)^n$ ordnen. Dann die Koeffizienten von $(x - x_0)$ vergleichen, d.h. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ setzen.

   $\Rightarrow$ Gleichungssystem (unendlich dimensional) für $a_0, a_1, \dots$.

   Die Reihenentwicklung wird unter Annahme einer guten Approximation abgebrochen.

1.4 Lösung des Beispiels

$$y'' - xy' + \lambda y = 0$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{\mathbf{n+1}} x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} (\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}-\mathbf{1}+1) a_n x^{\mathbf{n}-1} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{n}+\mathbf{1})(\mathbf{n}+\mathbf{2}) a_{\mathbf{n+2}} x^{\mathbf{n}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{\mathbf{n}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n(\lambda - 2n) = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(\lambda - 2n) a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Die Frage ist, wann ein Abbruch stattfindet (wie gross muss λ sein)?
Wenn n gerade ist ($n = 2m$), dann gilt bei $a_1 = 0$ weiters $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $\ldots$.
Wenn n ungerade ($n = 2m+1$), dann gilt bei $a_0 = 0$ weiters $a_2 = 0$, $a_4 = 0$, $\ldots$. a_1 kann beliebig gewählt werden, liefert $a_3 = a_5 = \cdots = 0$.